



# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

DOI: 10.18721/JPM.10101

УДК 539.3

*А.К. Беляев, Т.В. Зиновьева, К.К. Смирнов*

Санкт-Петербургский политехнический университет  
Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СИЛЬФОННЫХ КОМПЕНСАТОРОВ КАК УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Рассматривается напряженно-деформированное состояние (НДС) сильфона  $U$ -образного компенсатора при нагрузке внутренним давлением. Выведены уравнения и проведены численные расчеты НДС сильфона как гофрированной оболочки вращения под действием осесимметричной нагрузки. Использован вариант классической теории оболочек на основе аналитической механики Лагранжа. Численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений построено методом конечных разностей. Найдено предельное значение давления, при котором начинаются пластические деформации. Численно исследована потеря устойчивости равновесия сильфона. Проведены расчеты НДС в программе ANSYS методом конечных элементов.

УПРУГАЯ ОБОЛОЧКА, ГОФРА, СИЛЬФОННЫЙ КОМПЕНСАТОР, УСТОЙЧИВОСТЬ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.

### Введение

При монтаже трубопроводов используются компенсаторы для уменьшения напряжений от действия температуры и вибрации трубы. Сильфон компенсатора представляет собой гофрированную оболочку вращения под внутренним давлением жидкости. При проектировании и эксплуатации таких конструкций необходимо обеспечить их прочность и устойчивость.

Расчет предельного внутреннего давления, при котором оболочка компенсатора переходит в пластическое состояние либо теряет устойчивость, представляет как научный, так и практический интерес.

Цель работы – нахождение указанного давления посредством математического и компьютерного моделирования.

В первой части статьи сильфон моделируется тонкой упругой гофрированной оболочкой. Выведена система обыкновенных

дифференциальных уравнений (ОДУ) и получено ее численное решение. Предельное давление, при котором начинаются пластические деформации сильфона, найдено по критерию Мизеса.

Расчетам оболочек посвящено много работ, содержащих теоретические [1 – 8], а также численные результаты [9, 10]. Нередко полную систему уравнений для оболочек выводят из уравнений трехмерной теории упругости, вводя те или иные упрощения. Однако использованию прямого подхода к расчетам оболочек как деформируемых поверхностей, а также аналитическим технологиям следует отдать предпочтение.

В данной работе применяется вариант классической теории оболочек как поверхностей с материальными нормальными, построенный на основе механики Лагранжа [11 – 14]. Применение этой теории для различных приложений описано в статьях [15 – 17].

Во второй части статьи рассматривается проблема статической устойчивости  $U$ -образного сильфона. Проведен теоретический расчет предельного внутреннего давления на сильфон, при котором возникают смежные формы равновесия. Результаты расчета верифицируются с помощью численного эксперимента методом конечных элементов в программе Ansys.

### Уравнения теории тонких оболочек

Оболочка рассматривается как материальная поверхность, частицы которой обладают пятью степенями свободы: тремя трансляциями и двумя поворотами. Движение определяется вектором малых перемещений  $\mathbf{u}$  и вектором малого поворота  $\boldsymbol{\theta}$  в касательной плоскости. Вводится вектор изменения нормали к оболочке

$$\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n} = \dot{\mathbf{n}}$$

(точка означает малое приращение при деформации).

По выражению работы внешнего распределенного момента вводится обобщенная сила, соответствующая вектору  $\boldsymbol{\varphi}$ :

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{m}^* \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{m}^* \equiv \mathbf{m} \times \mathbf{n}.$$

Деформация поверхности определяется тензорами

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})_{\perp}^S, \quad \boldsymbol{\kappa} = -(\nabla \boldsymbol{\varphi})_{\perp} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}^T. \quad (1)$$

Здесь  $\nabla$  — оператор Гамильтона на поверхности,  $\mathbf{b} \equiv -\nabla \mathbf{n}$  — второй метрический тензор. Величины в скобках с нижним и верхними индексами обозначают соответственно составляющие в касательной плоскости ( $\perp$ ), симметричную часть ( $S$ ) и транспонирование ( $T$ ).

Поворот связан с перемещением (согласно кинематической гипотезе Кирхгофа):

$$\boldsymbol{\varphi} = -\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}. \quad (2)$$

Принцип виртуальной работы позволяет вывести всю систему уравнений. Силовые факторы в оболочке вводятся как множители Лагранжа:  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  — симметричные тензоры сил и моментов;  $\mathbf{Q}$  — вектор перерезывающих сил. Эти тензоры и вектор лежат в касательной плоскости.

Из вариационной постановки следуют уравнения баланса сил и моментов:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{Qn}) + \mathbf{q} &= 0, \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu})_{\perp} + \mathbf{Q} &= \mathbf{m}^*, \end{aligned} \quad (3)$$

а также граничные условия на контуре в общем виде:

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}^0 - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} + \mathbf{Qn}) + \partial_l (\mathbf{A} \cdot \ln)] \cdot \delta \mathbf{u} - \\ - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \mathbf{n} \cdot \partial_v \delta \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{A} \equiv \mathbf{M}^0 \times \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{m}^*$  — внешняя распределенная нагрузка и момент на поверхности;  $\mathbf{P}^0$ ,  $\mathbf{M}^0$  — внешняя распределенная нагрузка и момент на контуре.

Всего в компонентах имеем пять уравнений равновесия и четыре скалярных условия на контуре оболочки.

На отрезке внутреннего контура длиной  $dl$  с нормалью  $\mathbf{v}$  действует (со стороны  $\mathbf{v}$ ) сила  $d\mathbf{F}$  и момент  $d\mathbf{M}$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} + \mathbf{Qn})dl, \quad d\mathbf{M} = \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n})dl, \\ (\mathbf{T} \equiv \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Для оболочки из изотропного материала соотношения упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = C_1 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{a} + C_2 \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\mu} = D_1 \boldsymbol{\kappa} \mathbf{a} + D_2 \boldsymbol{\kappa}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\kappa}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} C_1 = E h \nu / (1 - \nu^2), \quad C_2 = E h / (1 + \nu), \\ D_1 = C_1 h^2 / 12, \quad D_2 = C_2 h^2 / 12. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{a} \equiv \nabla \mathbf{r}$  — первый метрический тензор на поверхности (единичный тензор в касательной плоскости); коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  взяты такими же, как в пластине Кирхгофа;  $E$  — модуль упругости материала оболочки,  $h$  — ее толщина;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Соотношений упругости для вектора перерезывающих сил  $\mathbf{Q}$  в классической теории нет, вместо него имеем соотношение (2).

### Система уравнений для оболочек вращения

Рассмотрим оболочку, поверхность которой образована вращением меридиана вокруг оси  $x$  [11]. Меридиан задается за-

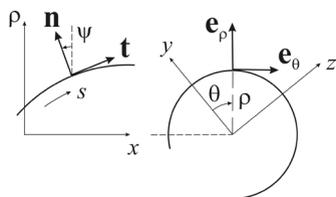


Рис. 1. Геометрическая схема к постановке задачи: поверхность вращения оболочки образована вращением меридиана вокруг оси  $x$ ; положение меридиана на поверхности определяется углом  $\theta$ . Остальные обозначения приведены в тексте

висимостью цилиндрических координат от дуговой координаты:  $x = x(s)$ ,  $\rho = \rho(s)$ , а его положение на поверхности определяется углом  $\theta$  (рис. 1).

Радиус-вектор точек поверхности задается равенством

$$\mathbf{r}(\theta, s) = x(s)\mathbf{i} + \rho(s)\mathbf{e}_\rho(\theta),$$

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{j} \cos(\theta) + \mathbf{k} \sin(\theta),$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  – орты декартовой системы координат вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно; орт касательной к параллели:

$$\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{j} \sin(\theta) + \mathbf{k} \cos(\theta) = \mathbf{e}'_\rho.$$

Для ортов касательной и нормали к меридиану в его плоскости имеем

$$\mathbf{t} = \partial \mathbf{r} / \partial s = x'(s)\mathbf{i} + \rho'(s)\mathbf{e}_\rho(\theta),$$

$$x' = \cos \psi, \quad \rho' = \sin \psi,$$

$$\partial \mathbf{t} / \partial s = \omega \mathbf{n}, \quad \omega \equiv \psi'(s), \quad \mathbf{n} \equiv -\mathbf{i} \sin \psi + \mathbf{e}_\rho \cos \psi,$$

где  $\omega$  – кривизна меридиана,  $\rho^{-1}$  – параллели.

В осесимметричной задаче равны нулю компоненты внешних нагрузок  $q_\theta$  и  $m_\theta^x$ , вектор перемещений оболочки имеет две компоненты:

$$\mathbf{u} = u_t \mathbf{t} + u_n \mathbf{n}.$$

По формулам (1), (2) определим поворот, деформации удлинения и изгиба:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \rho^{-1} u_\rho, \quad u_\rho \equiv u_t \sin \psi + u_n \cos \psi, \\ \varepsilon_t &= u'_t - \omega u_n, \quad \varphi_t = -\omega u_t - u'_n, \\ \kappa_\theta &= -\rho^{-1} \varphi_t \sin \psi - \rho^{-2} u_\rho \cos \psi, \\ \kappa_t &= \omega(u'_t - \omega u_n) - \varphi'_t. \end{aligned} \quad (6)$$

С использованием уравнений (5) запишем соотношения сил и моментов:

$$\begin{aligned} \mu_\theta &= (D_1 + D_2)\kappa_\theta + D_1\kappa_t, \\ \mu_t &= (D_1 + D_2)\kappa_t + D_1\kappa_\theta, \end{aligned} \quad (7)$$

$$T_\theta = (C_1 + C_2)\varepsilon_\theta + C_1\varepsilon_t - \rho^{-1}\mu_\theta \cos \psi,$$

$$T_t = (C_1 + C_2)\varepsilon_t + C_1\varepsilon_\theta + \omega\mu_t.$$

Систему в компонентах замыкают уравнения баланса (3):

$$\begin{aligned} \rho^{-1}(T_t - T_\theta) \sin \psi + T'_t - \omega Q_t + q_t &= 0, \\ -\rho^{-1}T_\theta \cos \psi + \omega T_t + \rho^{-1}Q_t \sin \psi + \\ + Q'_t + q_n &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\rho^{-1}(\mu_t - \mu_\theta) \sin \psi + \mu'_t + Q_t = m_t^x.$$

Из граничных условий (4) следуют три скалярных условия на контуре оболочки. В случае заделки это условия

$$u_t = u_n = 0, \quad \gamma_\theta \equiv u'_n = 0.$$

На свободном же контуре с нормалью  $\mathbf{v} = \mathbf{t}$  задаются растягивающая сила  $T_t = P_t^0$ , перерезывающая сила  $Q_t = P_n^0$  и изгибающий момент  $\mu_t = M_\theta^0$ .

#### НДС оболочки при осесимметричной нагрузке

Уравнения (6) – (8) могут быть сведены к системе ОДУ:

$$Y'(s) = f(s, Y), \quad (9)$$

$$Y = (u_t, u_n, \gamma_\theta, T_t, Q_t, \mu_t)^T$$

для столбца из шести неизвестных.

Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} u'_t &= \varepsilon_t + \omega u_n, \quad u'_n = \gamma_\theta, \\ \gamma'_\theta &= -\omega' u_t - \omega^2 u_n - 2\omega \varepsilon_t + \kappa_t, \\ T'_t &= \omega Q_t - \rho^{-1}(T_t - T_\theta) \sin \psi - q_t, \end{aligned} \quad (10)$$

$$Q'_t = \rho^{-1} \cos \psi T_\theta - \omega T_t - \rho^{-1} \sin \psi Q_t - q_n,$$

$$\mu'_t = -\rho^{-1}(\mu_t - \mu_\theta) \sin \psi - Q_t,$$

где введены обозначения

$$\varepsilon_t = (T_t - C_1 \varepsilon_\theta - \omega \mu_t) / (C_1 + C_2),$$

$$\varepsilon_\theta = \rho^{-1}(\sin \psi u_t + \cos \psi u_n),$$

$$\begin{aligned} \kappa_t &= (\mu_t - D_1 \kappa_0) / (D_1 + D_2), \\ \kappa_0 &= -\rho^{-1} \sin \psi \varphi_t - \rho^{-2} \cos \psi \times \\ &\quad \times (\sin \psi u_t + \cos \psi u_n), \\ \varphi_t &= -\omega u_t - \gamma_0. \end{aligned}$$

Система ОДУ (10) дополняется тремя граничными условиями на каждом крае оболочки. Эта краевая задача решается методом конечных разностей на промежутке  $s \in [0, L]$ . Дифференциальные уравнения аппроксимируются разностными с равномерным шагом  $\delta = L / N$ ; функции  $u_t \dots \mu_t$  непрерывного аргумента  $S$  заменяются сеточными функциями  $(u_t)_i \dots (\mu_t)_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ). Численная схема позволяет вычислить приближенные значения функций в узлах. Функции затем восстанавливаются посредством интерполяции.

При аппроксимации системы (10) используется неявная симметричная одношаговая разностная схема, имеющая второй порядок точности [18]:

$$Y'(s) = f(s, Y) \Rightarrow \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\delta} = \frac{f_i + f_{i+1}}{2}, \quad (11)$$

$$i = 0, 1, \dots, N,$$

для чего вводится один дополнительный узел с номером  $i = N + 1$ , и решение продолжается вне области определения  $[0, L]$  еще на один интервал  $\delta$  справа от границы. Таким образом, неизвестными становятся  $6N + 12$  значений.

Разностные уравнения (11) – это система  $6(N + 1)$  алгебраических уравнений, которая дополняется разностными аналогами шести граничных условий в узлах с номерами  $i = 0, N$ . Всего имеем  $6N + 12$  уравнений для такого же количества неизвестных, и система может быть решена стандартными алгоритмами [19]. После ее решения значения неизвестных функций в дополнительном узле откидываются и не используются при интерполяции. Изложенная схема была реализована в пакете Mathematica [20].

Меридиан гофрированной оболочки можно задать в виде

$$\rho(x) = R_0 + r \sin \Omega x, \quad \Omega = 2\pi/w, \quad (12)$$

где  $R_0, r$  – образующие радиусы;  $m$  – число

волн по длине оболочки;  $w$  – длина одного гофра.

Для каждой точки меридиана вычисляется дуговая координата по формуле

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (\rho'_x)^2} dx,$$

затем строятся интерполяции  $x(s)$ ,  $\rho(s)$  и рассчитываются остальные коэффициенты системы (10):

$$\cos \psi = x'_s, \quad \sin \psi = \rho'_s, \quad \omega = \rho''_s (x'_s)^{-1}.$$

После определения сил и моментов необходимо вычислить напряжения на лицевых поверхностях:

$$\sigma_t = \pm \frac{6\mu_t}{h^2} + \frac{\tau_t}{h}, \quad \sigma_0 = \pm \frac{6\mu_0}{h^2} + \frac{\tau_0}{h}, \quad (13)$$

где  $\tau_t = T_t - \omega \mu_t$ ,  $\tau_0 = (C_1 + C_2)\varepsilon_0 + C_1\varepsilon_t$ ,  $\mu_0 = (D_1 + D_2)\kappa_0 + D_1\kappa_t$ .

Далее находятся компоненты девиатора напряжений и норма Мизеса  $S_{eqv}$ :

$$S_t = (2\sigma_t - \sigma_0)/3, \quad S_0 = (2\sigma_0 - \sigma_t)/3, \quad (14)$$

$$S_{eqv} = \sqrt{(S_t^2 + S_0^2)/2}.$$

Начало пластических деформаций в оболочке определяется условием текучести [21]:

$$S_{eqv} = \tau_* / \sqrt{3}, \quad (15)$$

где  $\tau_*$  – предел текучести материала при растяжении.

Давление на оболочку, при котором условие (15) выполняется, будем считать предельным.

Проведены расчеты гофрированной оболочки с параметрами  $R_0 = 63,1$  мм,  $r = 7,6$  мм,  $h = 1$  мм,  $w = 14$  мм,  $m = 3,5$ . Материал оболочки – сталь с модулем упругости  $E = 200$  ГПа и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$ . Давление  $q_n = 1$  МПа. Края оболочки защемлены.

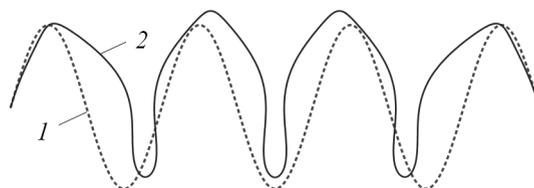


Рис. 2. Форма меридиана до (1) и после (2) приложения нагрузки

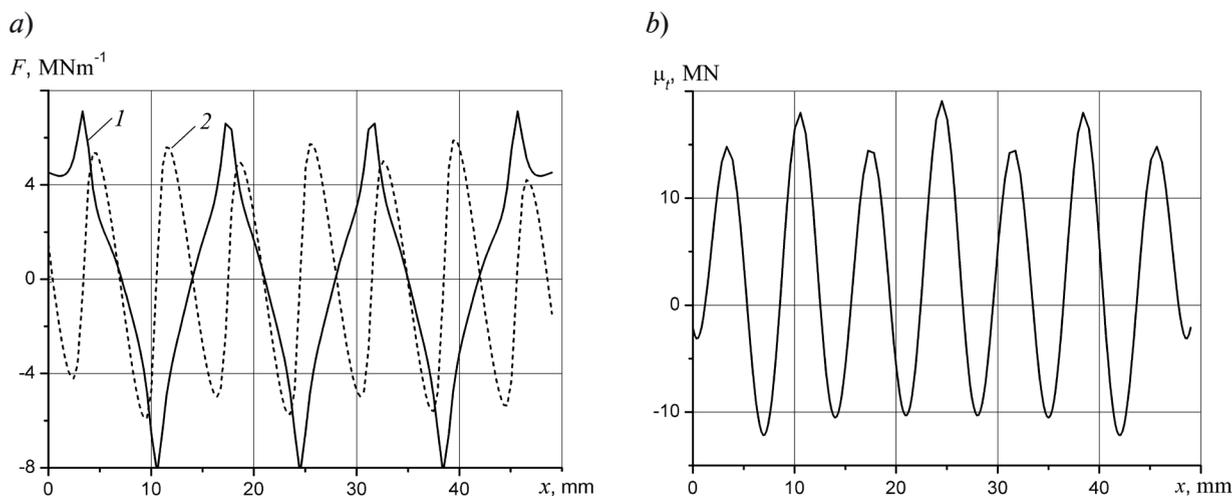


Рис. 3. Результаты расчета усилий (а) и изгибающего момента (b) в оболочке, у которой защемлены края. Представлены усилия  $T_i(1)$  и  $Q_i(2)$

Форма меридиана до и после приложения нагрузки показана на рис. 2; при ее построении смещения были промасштабированы.

На рис. 3 представлены зависимости усилий и изгибающего момента на внутреннем контуре оболочки от координаты  $x$ .

Расчеты показали, что максимум нормы Мизеса, соответствующий приложенной нагрузке  $q_n = 1$  МПа, равен  $S_{eqv}^{max} = 62$  МПа. Предел текучести стали при растяжении  $\tau_* = 215$  МПа. С учетом линейности задачи и формулы (15) можно утверждать, что пластическая деформация

начнется при выполнении условия

$$q_n^{cr} S_{eqv}^{max} = \tau_* / \sqrt{3},$$

откуда следует критическое значение давления на оболочку  $q_n^{cr} = 2$  МПа.

#### Расчет устойчивости сильфонного компенсатора U-образного типа

В работах [22, 23] описаны расчеты критического внутреннего давления, при котором наступает глобальная неустойчивость оболочки сильфона U-образного типа (рис. 4, а). Авторы предлагают рассматривать сильфон как стержень с приведенной

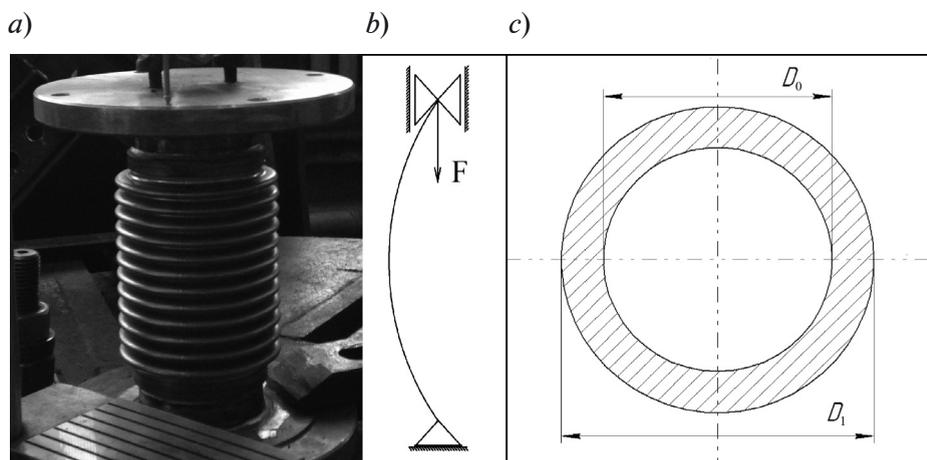


Рис. 4. Сильфон U-образного типа: его фотография на стенде (а); схема его модели для случая шарнирного закрепления на патрубках (b); условное цилиндрическое сечение сильфона (с)

изгибной жесткостью. Осевая сила, возникающая в закреплённом патрубке сильфона, принимается равной условной площади сечения оболочки, умноженной на внутреннее давление.

Рассмотрим случай шарнирного закрепления сильфона на патрубках (рис. 4, *b*). Решение задачи о потере устойчивости стержня с шарнирным закреплением концов представляется формулой Эйлера:

$$F = \pi^2 EI / l^2. \quad (16)$$

Далее представим сильфон как полый цилиндр с неизвестной толщиной стенки (рис. 4, *c*). Выразим эффективный модуль Юнга через осевую жесткость сильфона  $K$ :

$$E = Kl / S. \quad (17)$$

Выражения момента инерции данного сечения и его площади имеют вид

$$I = \pi(D_1^4 - D_0^4) / 64, \quad (18)$$

$$S = \pi(D_1^2 - D_0^2) / 4.$$

Далее подставим выражения (17), (18) в формулу Эйлера:

$$F = \frac{\pi^2 Kl(D_1^4 - D_0^4)}{16l^2(D_1^2 - D_0^2)}. \quad (19)$$

Дальнейшие преобразования приводят к выражениям

$$F = \pi^2 KD_{eq}^2 / 8l, \quad D_{eq}^2 \approx (D_1^2 + D_0^2) / 2, \quad (20)$$

после чего выразим осевую силу в следующем виде:

$$F = p\pi D_{eq}^2 / 4. \quad (21)$$

В итоге, подставляя выражение (21) в формулу (20), получим формулу для критического внутреннего давления сильфона:

$$p = \frac{\pi K}{2l} = \mu \frac{\pi K}{l}, \quad (22)$$

где  $\mu = 0,5$  при шарнирном закреплении,  $\mu = 1$  при смешанном, и  $\mu = 2$  при жестком закреплении.

Таким образом, критическое внутреннее давление зависит от осевой жесткости компенсатора, от суммарной длины его гофров, а также от способа закрепления патрубков.

### Сравнение результатов КЭ-моделирования и аналитического расчета

Используемая схема конечно-элементного расчета состоит из двух этапов:

Первый – статический расчет сильфона, нагруженного внутренним давлением;

Второй – поиск смежных форм равновесия.

Нами было рассмотрено несколько вариантов геометрии гофра. Для каждого из них были построены сильфоны из 3 – 12 гофр и рассмотрены постановки с различным закреплением, а именно:

шарнир – шарнир,

шарнир – заделка,

заделка – заделка.

В конечно-элементной (КЭ) модели использованы 8-узловые оболочечные элементы.

Рассмотрим схему КЭ-решения подробнее. Предварительно решается задача статического нагружения внутренним давлением, из которой выводится матрица напряжений  $[\sigma]$ :

$$[K^T]U = F_{in}; \quad U \rightarrow [\sigma]. \quad (23)$$

Далее проводится поиск смежных форм равновесия. В работах [24, 25] описан учет изменения ориентации элемента поверхности при поиске соседнего равновесного состояния. Запишем уравнение равенства внешних нагрузок для смежных форм равновесия:

$$[K^T] \psi_i = \lambda_i [S] \psi_i, \quad (24)$$

$$[S] = \int_{vol} [S_g]^T [\sigma] [S_g] dV,$$

где  $[S]$  – матрица жесткости,  $[S_g]$  – матрица производных функций форм.

В результате решения имеем набор множителей исходной нагрузки  $\lambda_i$  для каждой из возможных смежных форм равновесия:

$$F_i = \lambda_i F_{in}. \quad (25)$$

Мы рассмотрели два набора параметров геометрии гофра (см. таблицу, наборы № 1 и № 2).

Для каждого из наборов параметров по результатам расчетов была построена кри-

Таблица

Расчетные наборы геометрических параметров гофра при КЭ-моделировании

Параметр	Обозначение	Значение параметра, мм		
		Набор № 1	Набор № 2	Набор № 3
Диаметр сальфона	$R$	15	100	117
Внешний радиус гофра	$r$	3,25	3,25	3,25
Высота гофра	$W$	10	10	15,2
Толщина слоя оболочки	$h$	0,5	0,5	0,5

вая распределения критического внутреннего давления в зависимости от количества  $N$  гофров в сальфоне. Также на графиках представлены значения, полученные аналитически по формуле (22).

Анализ полученных данных показал, что результаты КЭ-расчетов близки к теоретическим (рис. 5, *a*). Однако это не относится к оболочкам компенсаторов, для которых локальная форма потери устойчивости наступает раньше глобальной. Например, на рис. 5, *b* при значении критического давления 20 МПа происходит заметное расхождение результатов аналитического и конечно-элементного расчетов. Здесь наглядно демонстрируется эффект потери устойчивости в плоскости гофра. Следует

отметить, что критическое давление, при котором возникают смежные устойчивые локальные формы равновесия, практически не зависит от количества гофров в сальфоне.

Рассмотрим некоторые из полученных смежных форм равновесия сальфонов. На рис. 6 изображены сальфоны, состоящие из четырех и семи гофров. Основные геометрические параметры гофра приведены в таблице (набор № 3).

Из анализа рис. 6 можно заключить, что глобальная форма потери устойчивости характеризуется отклонением оболочки сальфона от оси симметрии, в то время как особенность локальной формы – изгиб оболочки в плоскости гофра.

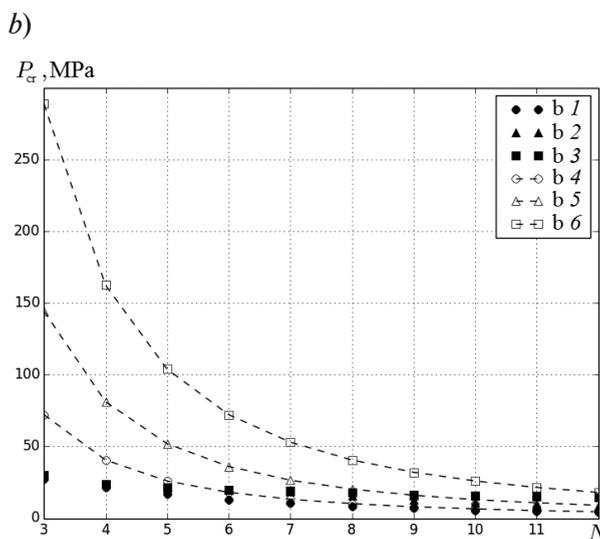
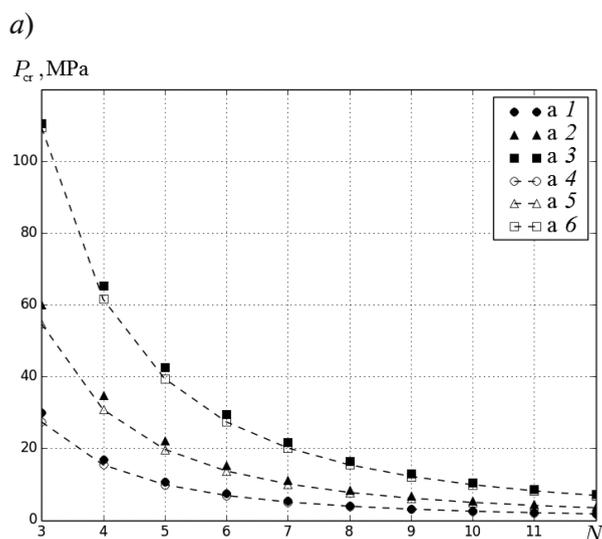


Рис. 5. Сравнение расчетных зависимостей критического внутреннего давления сальфона, полученных аналитически (кривые 4 – 6) и при КЭ-моделировании (1 – 3), от количества гофров с двумя наборами параметров: № 1 (*a*) и № 2 (*b*) (см. таблицу).

Рассмотрены постановки задач с различным закреплением сальфонов: шарнир – шарнир (1,4), шарнир – заделка (2,5), заделка – заделка (3,6)

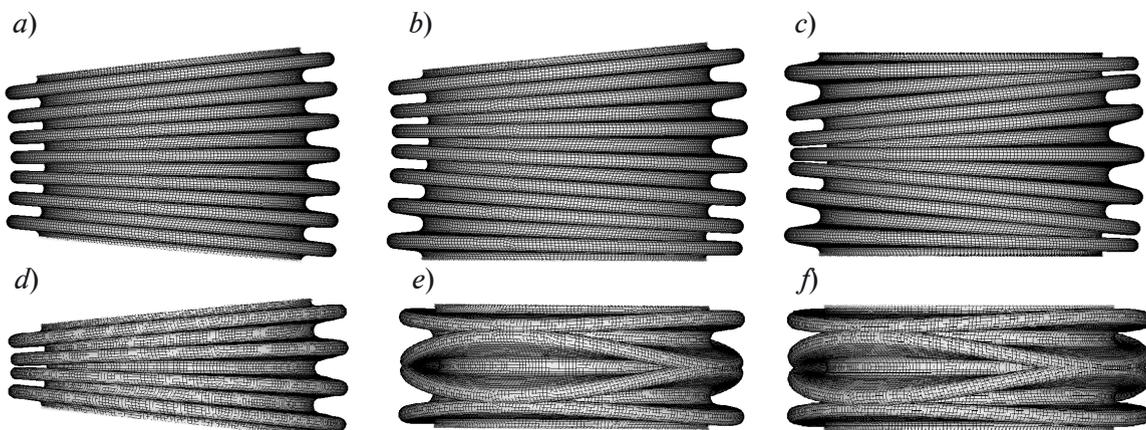


Рис. 6. Примеры сильфонов, для которых расчетом получены смежные формы равновесия: сильфоны, состоящие из семи (*a – c*) и четырех (*d – f*) гофров, при шарнирном (*a, d*), смешанном (*b, e*) и заделанном (*c, f*) закреплениях

### Заключение

В работе поставлена и решена задача о напряженно-деформированном состоянии и критическом внутреннем давлении в сильфоне компенсатора как упругой гофрированной оболочки. Использован современный вариант классической теории оболочек, выведены уравнения для оболочки вращения под осесимметричной нагрузкой. Обыкновенные дифференциальные уравнения для гофрированной оболочки решены методом конечных разностей. Использован

критерий Мизеса для нахождения критического давления при переходе в пластическое состояние.

Проведено теоретическое и численное исследование устойчивости сильфона компенсатора *U*-образного типа под действием внутреннего давления, смоделированы условия возникновения смежных форм равновесия. Сравнение теоретических результатов с данными численного эксперимента, проведенного в программе *Ansys*, выявило совпадение для глобальной формы потери устойчивости при значительной длине оболочки.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки. М.: Наука, 1992. 392 с.  
 [2] Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.  
 [3] Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 568 с.  
 [4] Еремеев В.А., Зубов Л.М. Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008. 280 с.  
 [5] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2010. 380 с.  
 [6] Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. М.: Наука, 1968. 456 с.  
 [7] Blaauwendraad J., Hoefakker J.H. Structural shell analysis, Springer, Netherlands, 2014.  
 [8] Berdichevsky V.L. Variational principles of continuum mechanics. Vol. 2. Applications. Berlin: Springer, 2009.  
 [9] Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. Ч. 2.

Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. М.: Физматлит, 2011. 248 с.  
 [10] Chapelle D., Bathe K.J. The finite element analysis of shells – Fundamentals // Computational Fluid and Solid Mechanics. 2nd ed. Berlin: Springer, 2011.  
 [11] Елисеев В.В. Механика упругих тел. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2003. 336 с.  
 [12] Елисеев В.В. К нелинейной теории упругих оболочек // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2006. № 3. С. 35–39.  
 [13] Eliseev V., Vetyukov Yu. Finite deformation of thin shells in the context of analytical mechanics of material surfaces // Acta Mechanica. 2010. Vol. 209. No. 1-2. Pp. 43–57.  
 [14] Eliseev V., Vetyukov Yu. Theory of shells as a product of analytical technologies in elastic body mechanics // Shell Structures: Theory and

Applications – Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference. 2014. Vol. 3. Pp. 81–84.

[15] **Eliseev V.V., Vetyukov Yu.M., Zinov'eva T.V.** Divergence of a helicoidal shell in a pipe with a flowing fluid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2011. Vol. 52. No.3. Pp. 450–458.

[16] **Eliseyev V.V., Zinovieva T.V.** Two-dimensional (shell-type) and three-dimensional models for elastic thin-walled cylinder // PNRPU Mechanics Bulletin. 2014. Vol. 3. Pp. 50–70.

[17] **Зиновьева Т.В.** Вычислительная механика упругих оболочек вращения в машиностроительных расчетах // Материалы 2-й Международной научно-практической конференции «Современное машиностроение. Наука и образование». 14–15 июня 2012. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. С. 335–343.

[18] **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Г.** Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. 630 с.

[19] **Chapra S.C., Canale R.P.** Numerical methods for engineers. New York: McGraw-Hill

Education, 2014.

[20] **Borwein J.M., Skerrit M.B.** An introduction to modern mathematical computing: with Mathematica. Springer. Vol. 16, 2012.

[21] **Елисеев В.В.** Механика деформируемого твердого тела. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 231 с.

[22] **Аксельрад Э.Л.** Гибкие оболочки. М.: Наука, 1976. 376 с.

[23] **Гусенков А.П., Лукин Б.Ю., Шустов В.С.** Унифицированные гибкие элементы трубопроводов. М.: Изд-во стандартов, 1988. 293 с.

[24] **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

[25] **Bonet J., Wood R.D.** Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[26] **Meissner E.** Über das Knicken Kreisförmiger Scheiben // Schweizerische Bauzeitung. 1933. Pp. 87–89.

[27] **Mansfield E.H.** On the buckling of annular plate // Farnborough: Royal Aircraft Establishment. 1959. Pp. 16–23.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**БЕЛЯЕВ Александр Константинович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
 vice.ipme@gmail.com

**ЗИНОВЬЕВА Татьяна Владимировна** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Компьютерные технологии в машиностроении» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
 tatiana.zinovieva@gmail.com

**СМИРНОВ Кирилл Константинович** – аспирант кафедры «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
 kismir@mail.ru

---

### *Belyaev A.K., Zinovieva T.V., Smirnov K.K.* THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDIES OF THE STRESS-STRAIN STATE OF EXPANSION BELLOWS AS ELASTIC SHELLS.

This paper studies a stress-strain state of the *U*-shaped expansion bellows under an internal-pressure induced load. The bellows is considered as a corrugated shell of revolution under axisymmetric load. The governing equations have been derived and the numerical calculations of the stress-strain state were carried out. A variant of the classical shell theory based upon Lagrangian mechanics was used. The finite-difference method was applied to solve the obtained system of ordinary differential equations. The ultimate internal pressure resulting in plastic deformations was determined. A simulation of the loss of equilibrium stability

of the expansion bellows was performed. The ANSYS code was used for Finite-Element Method (FEM) in order to calculate the stress-strain state in the bellows.

ELASTIC SHELL, CORRUGATION, EXPANSION BELLOW, STABILITY, FINITE ELEMENT METHOD.

## REFERENCES

- [1] **I.A. Birger**, Sterzhni, plastinki, obolochki [Rods, plates, shells], Moscow, Nauka, 1992.
- [2] **A.L. Goldenveyzer**, Teoriya uprugikh tonkikh obolochek [The theory of elastic thin shells], Moscow, Nauka, 1976.
- [3] **L.G. Donnell**, Balki, plastiny i obolochki [Beams, plates and shells], Moscow, Nauka, 1982.
- [4] **V.A. Eremeyev, L.M. Zubov**, Mekhanika uprugikh obolochek [Mechanics of elastic shells], Moscow, Nauka, 2008.
- [5] **V.V. Novozhilov**, Teoriya tonkikh obolochek [The theory of thin shells], St. Petersburg, Izd-vo St. Petersburg. Un-ta, 2010.
- [6] **V.S. Chernina**, Statika tonkostennykh obolochek vrashcheniya [The statics of thin-walled shells of revolution], Moscow, Nauka, 1968.
- [7] **J. Blaauwendraad, J.H. Hoefakker**, Structural shell analysis, Springer Netherlands, 2014.
- [8] **V.L. Berdichevsky**, Variational principles of continuum mechanics, Vol. 2, Applications, Springer, Berlin, 2009.
- [9] **V.V. Karpov**, Prochnost i ustoychivost podkreplennykh obolochek vrashcheniya: in 2 Vols., Part 2. Vychislitelnyy eksperiment pri staticheskom mekhanicheskom vozdeystvii [Strength and stability of stiffened shells of revolution, in 2 Vols., Part 2. Numerical experiment under static mechanical action], Moscow, Fizmatlit, 2011.
- [10] **D. Chapelle, K.J. Bathe**, The finite element analysis of shells – Fundamentals, Computational Fluid and Solid Mechanics, 2nd ed. Springer, Berlin, 2011.
- [11] **V.V. Eliseyev**, Mekhanika uprugikh tel [Mechanics of elastic bodies], St. Petersburg, Izd-vo SPbGPU, 2003.
- [12] **V.V. Eliseyev**, K nelineynoy teorii uprugikh obolochek [To nonlinear theory of elastic shells], St. Petersburg State Polytechnical University Journal. (3) (2006) 35–39.
- [13] **V. Eliseev, Yu. Vetyukov**, Finite deformation of thin shells in the context of analytical mechanics of material surfaces, Acta Mechanica. 209 (1-2) (2010) 43 –57.
- [14] **V. Eliseev, Yu. Vetyukov**, Theory of shells as a product of analytical technologies in elastic body mechanics, Shell Structures: Theory and Applications. – Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference. (3) (2014) 81–84.
- [15] **V.V. Eliseev, Yu.M. Vetyukov, T.V. Zinov'eva**, Divergence of a helicoidal shell in a pipe with a flowing fluid, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 52 (3) (2011) 450–458.
- [16] **V.V. Eliseyev, T.V. Zinovieva**, Two-dimensional (shell-type) and three-dimensional models for elastic thin-walled cylinder, PNRPU Mechanics Bulletin, (3) (2014) 50–70.
- [17] **T.V. Zinovyeva**, Vychislitelnaya mekhanika uprugikh obolochek vrashcheniya v mashinostroytelnykh raschetakh [Numerical mechanics of elastic shells of revolution in mechanical engineering calculations], Materialy 2-y mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii “Sovremennoye mashinostroyeniye. Nauka i obrazovaniye”. June 14–15, 2012. St. Petersburg: Izd-vo Politekh. Un-ta (2012) 335–343.
- [18] **N.S. Bakhvalov, N.P. Zhidkov, G.G. Kobelkov**, Chislennyye metody [Numerical methods], Moscow, Binom, Laboratoriya znaniy, 2003.
- [19] **S.C. Chapra, R.P. Canale**, Numerical methods for engineers, McGraw-Hill Education, New York, 2014.
- [20] **J.M. Borwein, M.B. Skerit**, An introduction to modern mathematical computing: with Mathematica, Springer 16 (2012).
- [21] **Eliseyev V.V.**, Mekhanika deformiruyemogo tverdogo tela [Mechanics of deformed solids], St. Petersburg: Izd-vo Politekh. Un-ta, 2006.
- [22] **E.L. Akselrad**, Gibkiye obolochki [Flexible shells], Moscow, Nauka, 1976.
- [23] **A.P. Gusenkov, B.Yu. Lukin, V.S. Shustov**, Unifitsirovannyye gibkiye elementy truboprovodov [Unified flexible elements of pipelines], Moscow, Izdatelstvo standartov, 1988.
- [24] **A.S. Volmir**, Ustoychivost deformiruyemykh sistem [Stability of deformed systems], Moscow, Nauka, 1967.
- [25] **J. Bonet, R.D. Wood**, Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis, Cambridge University Press, 1997.
- [26] **E. Meissner**, Über das Knicken Kreisförmiger Scheiben, Schweizerische Bauzeitung (1933) 87–89.
- [27] **E.H. Mansfield**, On the buckling of annular plate, Farnborough: Royal Aircraft Establishment (1959) 16–23.

#### THE AUTHORS

**BELYAEV Aleksander K.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation  
vice.ipme@gmail.com

**ZINOVIEVA Tatiana V.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation  
tatiana.zinovieva@gmail.com

**SMIRNOV Kirill K.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*  
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation  
kismir@mail.ru