1(141)/2012

Научно-технические ведомости СПбГПУ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Санкт-Петербург: Издательство Политехнического университета

Министерство образования и науки РФ

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ СПбГПУ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА

Васильев Ю.С., академик РАН (председатель); *Алфёров Ж.И.*, академик РАН;
Костюк В.В., академик РАН; *Лопота В.А.*, чл.-кор. РАН;
Окрепилов В.В., академик РАН; *Патон Б.Е.*, академик РАН и НАН Украины;
Рудской А.И., чл.-кор. РАН; *Федоров М.П.*, академик РАН;
Фортов В.Е., академик РАН.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

Васильев Ю.С., академик РАН (главный редактор); *Арсеньев Д.Г.*, д-р техн. наук, профессор;
Бабкин А.В., д-р экон. наук, профессор (зам. гл. редактора);
Боронин В.Н., д-р техн. наук, профессор; *Глухов В.В.*, д-р экон. наук, профессор;
Дегтярева Р.В., д-р истор. наук, профессор; *Иванов А.В.*, д-р техн. наук, профессор;
Иванов В.К., д-р физ.-мат. наук, профессор; *Козловский В.В.*, д-р физ.-мат. наук, профессор;
Рудской А.И., чл.-кор. РАН (зам. гл. редактора); *Юсупов Р.М.*, чл.-кор. РАН.

СЕРИЯ «ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ СЕРИИ

Алфёров Ж.И., академик РАН — председатель;
Варшалович Д.А., академик РАН;
Глухих В.А., академик РАН;
Жуков А.Е., чл.-кор. РАН — зам. председателя;
Индейцев Д.А., чл.-кор. РАН;
Рудской А.И., чл.-кор. РАН — зам. председателя;
Рутберг Ф.Г., академик РАН;
Сурис Р.А., академик РАН;

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ

Иванов В.К., д-р физ.-мат. наук, профессор — председатель;
Антонов В.И., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Блинов А.В., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Боровков А.И., канд. техн. наук, проректор по перспективным проектам;
Капралова В.М., канд. физ.-мат. наук, доцент — отв. секретарь;
Кожевников Н.М., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Самойлов В.О., чл.-кор. РАМН;
Топтыгин И.Н., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Тропп Э.А., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Фирсов Д.А., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Фотиади А.Э., д-р физ.-мат. наук, профессор — зам. председателя.

Журнал выходит под научно-методическим руководством Российской академии наук с 1995 г.

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Журнал издается в пяти сериях:

Наука и образование;
Физико-математические науки;
Экономические науки;
Информатика, телекоммуникации, управление;
Гуманитарные и общественные науки.

Журнал зарегистрирован в Госкомпечати РФ. Свидетельство № 013165 от 23.12.94.

Подписной индекс **18390** в каталоге «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать».

Журнал включен в базу данных «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ), размещенную на платформе Национальной электронной библиотеки на сайте http://www.elibrary.ru

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

Точка зрения редакции может не совпадать с мнением авторов статей.

Адрес редакции и издательства: Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.
Тел. редакции серии (812) 294-22-85.

© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2012

Содержание

Физика конденсированного состояния

Андреева Н.В., Плясцов С.А., Филимонов А.В. *Исследование поверхностного пьезоотклика керамики титаната стронция методами силовой микроскопии пьезоотклика при низких температурах* 7

Коренев В.В., Савельев А.В., Жуков А.Е., Омельченко А.В., Максимов М.В. *Модель одновременной генерации через основное и возбужденное состояния в полупроводниковых лазерах на квантовых точках* 13

Математическое моделирование физических процессов

Зеликман М.А., Поцелуев К.А. *Влияние структурного фактора на конфигурацию линейных вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде* 17

Грицкевич М.С., Гарбарук А.В. *Встроенный метод крупных вихрей с использованием объемного источника турбулентных пульсаций* 27

Приборы и техника физического эксперимента

Чижова Е.В. *Расчет геометрии рентгенооптической схемы рентгенофлуоресцентного микроанализатора* 37

Чижова Е.В., Ершов Н.Н. *Расчет системы фокусировки первичного излучения в рентгенофлуоресцентном микроанализаторе* 41

Миронов В.О. *Оценка параметров фотонных пучков в дистанционной лучевой терапии по данным ионизационных матриц* 45

Елагин В.В., Фотиади А.Э. *Определение интенсивности приземного ультрафиолетового излучения по данным GOME* 53

Ушаков Н.А., Дориго Д. (Dorigo D.), Котов О.И., Лиокумович Л.Б. *Методика цифровой обработки спектров комбинационного рассеяния для диагностики состояния углеводородных смазок на основе оценки их вязкости* 60

Физическая электроника

Архипов А.В., Дворецкая Н.В., Керн Ш. (Kern St.), Лукша О.И., Соминский Г.Г. *Определение энергетического спектра электронов, бомбардирующих твердотельную мишень* 68

Архипов А.В., Крель С.И. *Простая модель облегченной полевой эмиссии электронов из наноматериалов* 74

Физическая оптика

Гончарова П.С., Криштоп В.В., Сюй А.В., Толстов Е.В., Пикуль О.Ю. *Электрооптическое управление немонохроматическим светом в системе из двух анизотропных кристаллов* 82

Марценюк М.А., Фуфачев М.А. *Формирование среды с искусственной оптической активностью* 86

Физическое материаловедение

Шурыгина Н.А., Щербаченко Л.А., Донской В.И., Карнаков В.А., Трошев А.А., Краснов Д.А. *Электрические явления на межфазных границах в гетерогенных полиминеральных дисперсных системах* 93

Саракуз О.Н., Горяйнов Г.И., Капралова В.М., Слуцкер А.И. *Новые пространственно сшитые сегментированные полиэфируретансилоксановые эластомеры для медицинских имплантатов* 100

Математика

Петриченко М.Р., Серов Д.В. *Типичные предельные задачи для уравнения Крокко* 108

Зубов В.И., Зубов С.В., Стрекопытова М.В., Стрекопытов И.С. *Задача о построении управлений управляемой механической системы* 113

Теоретическая физика

Павлов Ф.Ф. *Расчет спин-зависимой структурной функции дейтрона в переменных светового конуса* 118

Кисель В.В., Овсиюк Е.М., Веко О.В., Редьков В.М. *Квантовая механика векторной частицы в магнитном поле на четырехмерной сфере* 128

Овсиюк Е.М., Веко О.В., Кисель В.В., Редьков В.М. *Новые задачи квантовой механики и уравнение Гойна* 137

Радиофизика

Божокин С.В., Лыков С.Н. *Непрерывное вейвлет-преобразование* 146

Баранов А.А., Ермак С.В., Семенов В.В. *Подавление ориентационного светового сдвига частоты радиооптического резонанса в щелочных атомах в условиях лазерной накачки* 152

Баранов А.А., Ермак С.В., Смолин Р.В., Семенов В.В. *Световые сдвиги частоты радиооптического резонанса в парах рубидия при селективной оптической накачке* 156

Шацкий А.В., Шацкая Л.А. *Дифракционное затухание ультразвукового луча, создаваемого торцом цилиндрического волновода* 160

Крячко А.Ф., Романова В.И., Федорова Л.А. *Дифракция электромагнитных волн на неоднородности плазменного волновода* 164

Черепанов А.С. *Возбуждение поверхностных волн элементарным диполем* 177

Хроника

Васильева М.А., Гаврикова Т.А., Ильин В.И. *XIII Всероссийская молодежная конференция по физике полупроводников и наноструктур, полупроводниковой опто- и наноэлектронике* 184

Черепанов А.С. , Сочава А.А. *Научная конференция студентов-радиофизиков России* 188

Сведения об авторах, контактные данные 192

Аннотации, ключевые слова 198

Contents

Condensed matter physics

Andreeva N.V., Plyastsov S.A., Filimonov A.V. *Low-temperature surface piezoelectricity in strontium titanate ceramics via piezoresponse force microscopy* 7

Korenev V.V., Savelyev A.V., Zhukov A.E., Omelchenko A.V., Maximov M.V. *The model of simultaneous double-state lasing in semiconductor QD lasers* 13

Simulation of physical processes

Zelikman M.A., Potseluev K.A. *The influence of structural factor on the configuration of linear vortex in the 3D-ordered Josephson medium* 17

Gritskevich M.S., Garbaruk A.V. *Embedded large eddy simulation with the use of a volume source of turbulent fluctuations* 27

Experimental technique and devices

Chizhova E.V. *Calculation of the micro-XRF spectrometer scheme geometry* *37*

Chizhova E.V., Ershov N.N. *Calculation of a primary X-ray radiation focusing system in the micro-XRF spectrometer* 41

Mironov V.O. *An estimation of photon beams parameters in the remote radiation treatment from ionization matrices* 45

Elagin V.V., Fotiadi A.E. *The determination of ground ultraviolet radiation intensity from GOME data* 53

Ushakov N.A., Dorigo D., Kotov O.I., Liokumovich L.B. *Technique of digital signal processing of Raman spectra for hydrocarbon lubricants condition diagnostics based on viscosity estimation* 60

Physical electronics

Arkhipov A.V., Dvoretskaya N.V., Kern St., Louksha O.I., Sominski G.G. *Reconstruction of energy spectra of electrons bombarding a solid target* 68

Arkhipov A.V., Krel S.I. *A simple model of facilitated field-induced electron emission from nanomaterials* 74

Physical optics

Goncharova P.S., Krishtop V.V., Sui A.V., Tolstov E.V., Pikul O.Yu. *The electro-optical control of nonmonochromatic light in a system of two anisotropic crystals* 82

Martsenyuk M.A., Fufachev M.A. *The formation of medium with artificial optical activity* 86

Physical materials technology

Shourygina N.A., Sherbachenko L.A., Donskoy V.I., Karnakov V.A., Troshev A.A., Krasnov D.A. *Electrical phenomena at interfaces in heterogeneous polymineral systems dispersed* 93

Sarakuz O.N., Goryainov G.I., Kapralova V.M., Slutsker A.I. *New segmented cross-linked poly(esterurethansiloxane) elastomers for medical implants* 100

Mathematics

Petrichenko M.R., Serov D.V. *Typical limiting problems for the Crocco equation* 108

Zubov V.I., Zubov S.V., Strecopitova M.V., Strecopitov I.S. *The problem of construction of controls over a mechanical system controlled* 113

Theoretical physics

Pavlov F.F. *The calculation of spin-dependent structure function of a deuteron in a formal description of the light cone* 118

Kisel V.V., Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Red'kov V.M. *Quantum mechanics for a vector particle in the magnetic field on four-dimensional sphere* 128

Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Kisel V.V., Red'kov V.M. *New problems in quantum mechanics and the Heun equation* 137

Radiophysics

Bozhokin S.V., Lykov S.N. *Continuous wavelet transformation* 146

Baranov A.A., Ermak S.V., Semenov V.V. *Orientation light shift suppression in alkali atoms microwave standards with laser pumping* 152

Baranov A.A., Ermak S.V., Smolin R.V., Semenov V.V. *Radio-optical resonance frequency light shift in selective optical pumped rubidium vapor* 156

Shatsky A.V., Shatskaya L.A. *Diffraction attenuation of the ultrasonic ray of the cylindrical waveguide created by the end face* 160

Kryachko A.F., Romanova V.I., Fedorova L.A. *Diffraction of electromagnetic waves by heterogeneity of the plasma waveguide* 164

Cherepanov A.S. *The excitation of surface waves by an elementary dipole* 177

Chronicle

Vasil'eva M.A., Gavricova T.A., Ilyin V.I. *The XIIIth All-Russian Young-People Conference on Semiconductor Physics and Nanostructures, Semiconductor Opto- and Nanoelectronics* 184

Cherepanov A.S., Sochava A.A. *The scientific conference of Russian undergraduates specializing in radiophysics* 188

About the authors, contact information 192

Abstracts, key words 203

УДК 538.975: 620.22 - 022.53

Н.В. Андреева, С.А. Плясцов, А.В. Филимонов

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ПЬЕЗООТКЛИКА КЕРАМИКИ ТИТАНАТА СТРОНЦИЯ МЕТОДАМИ СИЛОВОЙ МИКРОСКОПИИ ПЬЕЗООТКЛИКА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

В настоящее время одним из перспективных материалов для микроэлектроники является титанат стронция $SrTiO_3$. Особый интерес к этому соединению обусловлен его аномальными диэлектрическими (почти сегнетоэлектрическими) свойствами при низких температурах. При нормальных условиях $SrTiO_3$ является виртуальным сегнетоэлектриком, в котором квантовые флуктуации и наличие сегнетоэластического фазового перехода при $T_c \approx 105$ K препятствуют реализации сегнетоэлектрического фазового перехода. Таким образом, титанат стронция обладает аномальными диэлектрическими свойствами в области низких температур, но до 0 K остается параэлектриком [1].

Интерес к изучению низкотемпературных свойств титаната стронция также обусловлен результатами исследований, подтверждающих наличие структурных, диэлектрических и ультразвуковых аномалий при температурах $T \approx 30 - 40$ K [2 – 7] и $T \approx 65$ K [2, 8]. Согласно гипотезе Мюллера [6], при температурах ниже 37 K в $SrTiO_3$ возникает когерентное квантовое состояние – «состояние Мюллера», аналогичное сверхтекучести жидкого гелия. До сегодняшнего момента экспериментальных данных, однозначно подтверждающих данную гипотезу, получено не было. Исследование низкотемпературной динамики сегнетоэластических свойств титаната стронция позволит прояснить природу физических процессов, происходящих в виртуальных и низкотемпературных сегнетоэлектриках.

В работе проведено исследование сегнетоэластических свойств поверхности керамики титаната стронция при низких температурах методом силовой микроскопии пьезоотклика. Метод позволяет проводить измерения пространственного распределения полярных нанообластей на поверхности образца при различных температурах.

Схема эксперимента

Исследования сегнетоэластических свойств поверхности $SrTiO_3$ проводились на криогенном атомно-силовом микроскопе AttoAFM I (AttocubeSystems, Германия). Микроскоп позволяет проводить измерения топографии, магнитных и электрических свойств поверхности образцов в диапазоне температур от 4 до 285 K. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1.

Образец *1* с помощью вакуумной смазки закрепляется на держателе образца *2*. Под образцом расположен тонкопленочный температурный датчик *3*, который смонтирован в проводящем корпусе и обеспечивает измерение температуры образца с точностью ± 3 мK во всем температурном диапазоне. Блок элементов пьезосканера *4* обеспечивает прецизионное перемещение образца при сканировании. Держатель образца электрически изолирован от термодатчика и пьезосканера.

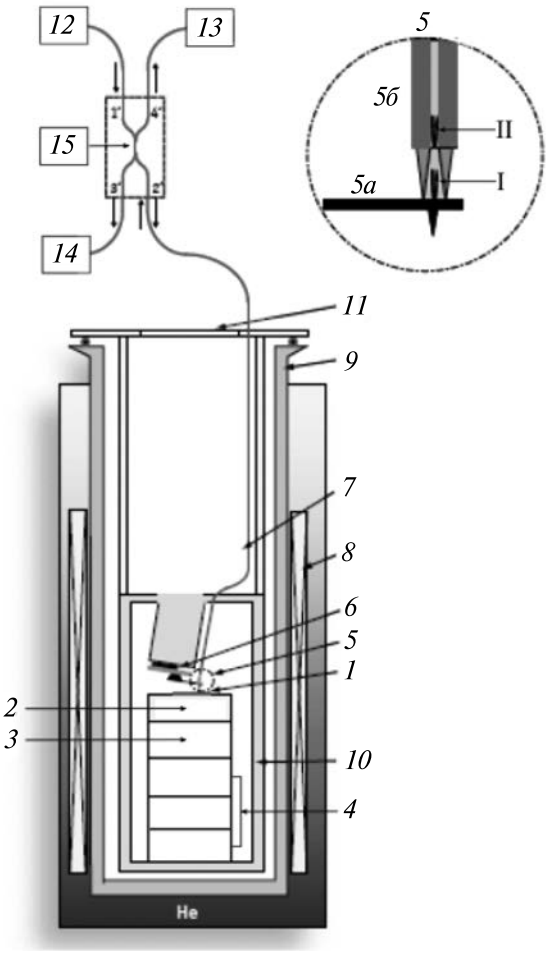


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:
1 – образец; *2* – держатель образца; *3* – температурный датчик; *4* – блок элементов пьезосканера; *5* – система регистрации положения зонда; *6* – пьезовибратор; *7* – одномодовое оптоволокно; *8* – сверхпроводящий магнит; *9* – вакуумная труба; *10* – титановый каркас для монтирования элементов атомно-силового микроскопа; *11* – оптическое окно; *12* – лазер; *13*, *14* – фотодетекторы; *15* – оптический сплиттер.
На вставке *5*: *5а* – зонд; *5б* – одномодовое оптоволокно; I, II – лазерные лучи, отраженные от зонда и от конца оптоволокна

Свойства поверхности исследовались методом зондовой микроскопии. Для этого над измеряемым образцом была смонтирована измерительная головка микроскопа, состоящая из зонда 5*а* и системы регистрации *5* его положения при сканировании. Атомно-силовой зонд был закреплен на пьезовибраторе *6*, обеспечивающем работу микроскопа в динамических режимах. Система регистрации положения зонда была построена по интерферометрическому принципу и состояла из одномодового оптоволокна *5б*, полупроводникового ИК лазера *12* с рабочей длиной волны 1330 нм и фотодетектора *13* (второй фотодетектор *14* является опциональным и может служить, например, для контроля интенсивности лазерного излучения). Между зондом микроскопа *5а* и отполированным концом оптоволокна реализован интерферометр Фабри – Перо. Таким образом, оптоволокно выполняет двоякую функцию: с одной стороны, доставляет лазерное излучение к зонду (96 % лазерного излучения проходит через отполированный конец оптоволокна и частично отражается зондом), с другой, образует часть интерферометра (примерно 4 % лазерного излучения отражается от границы оптоволокно/воздух). Отраженный от зонда луч I частично проходит обратно в оптоволокно и интерферирует с лазерным лучом II, отраженным от границы оптоволокно/воздух. При отклонении зонда от исходного положения изменяется размер полости интерферометра, что соответсвует изменению уровня интерферометрического сигнала и в свою очередь приводит к изменению сигнала, регистрируемого на фотодетекторе *13*. Данный метод обеспечивает большую точность измерений по сравнению с системами, построенными по принципу регистрации положения отраженного от зонда лазерного луча на четырехсекционном фотодетекторе. Так, точность измерения амплитуды колебаний зонда в динамических режимах сканирования может превышать 160 фм/Гц$^{1/2}$.

Для проведения измерений во всем рабочем диапазоне температур вышеописанные элементы атомно-силового микроскопа помещаются в вакуумную трубу *9*, которая вставляется в криостат установки. Захолаживание установки происходит за счет адиабатического расширения сверхчистого гелия (газ сжимается компрессором до давления 24 атм, затем доставляется в криостат, где адиабатически расширяется). Во время измерений при низких температурах образец находится в гелиевой атмосфере.

Для исследования пространственного распределения полярных нанообластей на поверхности титаната стронция использовалась методика силовой микроскопии пьезоотклика. Суть методики состоит в измерении локального механического отклика от поверхности образца под действием переменного электрического

поля зонда атомно-силового микроскопа. При наличии пьезоотклика от поверхности локальное приложение электрического поля приведет к расширению или сужению области образца под зондом. Величина локального пьезоэлектрического отклика образца определяется с помощью величины отклонения зонда на частоте прикладываемого электрического поля $V = V_0 \cos(\omega t)$:

$$z = z_{topo} + d_{33} V_0 \cos(\omega t),$$

где d_{33} – компонент тензора пьезоэлектрических констант, ω – частота прикладываемого электрического поля, V_0 – амплитуда прикладываемого электрического поля, z_{topo} – отклонение зонда атомносилового микроскопа под действием сил Ван-дер-Ваальса, z – детектируемое отклонение зонда.

Фаза пьезоэлектрического отклика от поверхности зависит от направления поляризации образца под зондом. Для доменов, ориентированных перпендикулярно поверхности, с поляризацией, направленной вниз, колебания поверхности будут в фазе с приложенным напряжением и фаза φ будет равна нулю. Для доменов, ориентированных также перпендикулярно поверхности, но с поляризацией, направленной вверх, колебания поверхности будут в противоположной фазе к приложенному напряжению и фаза φ будет равна 180°.

Для исследований поверхностного пьезоотклика керамики титаната стронция использовались зонды, сделанные из поликристаллического кремния, допированного фосфором (MikroMasch, Литва). Общий радиус закругления иглы зонда составляет 10 нм, жесткость – 42 Н/м^2.

Результаты измерений

Исследование рельефа керамики титаната стронция при комнатной температуре позволило сделать выводы о шероховатости поверхности образца, обусловленной, в основном, царапинами, оставшимися после полировки. Среднеквадратическое отклонение профиля поверхности составило 10 нм. Измерение пьезоотклика, регистрируемого перпендикулярно поверхности, показало наличие полярных нанообластей на поверхности $SrTiO_3$; размер полярных доменов, визуализируемых по методике силовой микроскопии пьезоотклика, варьировался от 500 нм до 2 мкм. Результаты исследования поверхности при комнатной температуре приведены на рис. 2, *а*.

Для дальнейших исследований образец охлаждался до температуры 8 K. Измерения в режиме силовой микроскопии пьезоотклика проводились с шагом 10 – 20 K вплоть до T = 150 K. Результаты распределения полярных областей на поверхности $SrTiO_3$, полученные при T = 8 K, показали, что домены хорошо сформированы, амплитуда сигнала пьезоотклика внутри них распределена неравномерно, количество светлых доменов больше, чем темных (рис. 2, *б*). Отсутствует контраст на фазе сигнала пьезоотклика.

Картина распределения поверхностных пьезоэлектрических свойств существенно не менялась в диапазоне температур от 8 до 110 K. При T = 110 K появился контраст на фазе сигнала пьезоотклика, а наилучший фазовый контраст наблюдался при T = 130 K. Как и при более низких температурах, полярные домены на поверхности образца были хорошо сформированы, но амплитуда сигнала пьезоотклика была неравномерно распределена внутри доменов. Для распределения поверхностных свойств при данной температуре были характерны сформированная стенка доменов (четко визуализировалась), а также приблизительно равное количество светлых и темных доменов (рис. 2, *в*).

Анализ полученных результатов

Согласно проведенным ранее исследованиям керамики титаната стронция при комнатной температуре по методике силовой микроскопии пьезоотклика [9], было высказано предположение, что поверхностный пьезоотклик в $SrTiO_3$ объясняется флексоэлектрическим эффектом. Механизм возникновения такого эффекта обусловлен уменьшением размера ячейки в приповерхностных областях, а возникающий при этом градиент деформации у поверхности образца приводит к появлению поляризации.

В случае керамики ее отдельные зерна сориентированы случайным образом относительно нормали к поверхности. Направление вектора поляризации каждого зерна зависит от ориента-

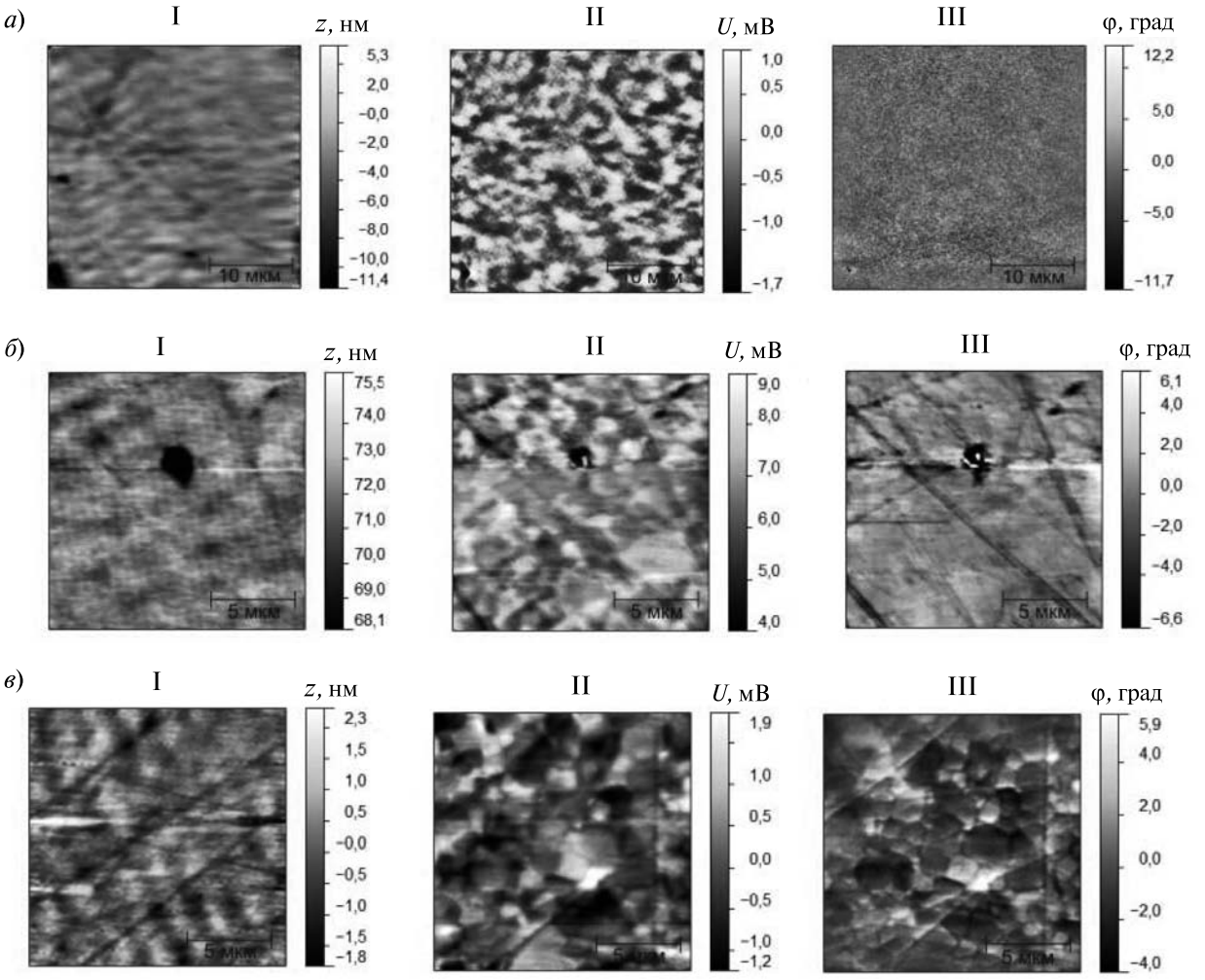


Рис. 2. Изображения в тоновых шкалах поверхности керамики титаната стронция, полученные методом силовой микроскопии пьезоотклика при разных температурах T, K: 295 (*а*), 8 (*б*), 130(*в*); I – высота рельефа, II, III – амплитуда и фаза сигнала пьезоотклика

ции его кристаллографических осей. Поскольку в методе силовой микроскопии пьезоотклика схема измерений подразумевает регистрацию сигнала в направлении, ортогональном поверхности образца, величина амплитуды сигнала пьезоотклика, получаемая в эксперименте, пропорциональна проекции вектора поляризации на нормаль к поверхности. Таким образом, можно заключить, что распределение амплитуды пьезоотклика от зерна к зерну обусловлено различной пространственной ориентацией зерен керамики, что не исключает возможности неоднородного распределения амплитуды пьезоотклика внутри самого зерна. Если принять в качестве рабочей гипотезы, что появление поверхностного пьезоотклика в титанате стронция вызвано флексоэлектрическим эффектом, то становится понятным и отсутствие фазового контраста на картине распределения сегнетоэлектрических свойств по поверхности образца в диапазоне температур 8 – 100 K, а также при комнатной температуре.

Появление фазового контраста при температурах 110 – 130 K может быть обусловлено структурным фазовым переходом в титанате стронция в температурном диапазоне $T \approx 105 - 100$ K, при котором происходит изменение симметрии кристаллической ячейки от кубической к тетрагональной. Перестройка кристаллической структуры может приводить

к возникновению поверхностного пьезоэлектрического эффекта (подробное теоретическое описание этого эффекта см. в работе [10]). Механизм возникновения поверхностного пьезоотклика вследствие пьезоэлектрического эффекта отличается от такового при флексоэлектрическом эффекте. В первом случае поляризация появляется за счет деформации, а не ее градиента. Поэтому при исследованиях по методике силовой микроскопии пьезоотклика на картине распределения пьезоэлектрических свойств по поверхности появляется фазовый контраст.

Для анализа температурной динамики структуры доменов на поверхности титаната стронция был проведен автокорреляционный анализ распределения амплитуды сигнала пьезоотклика. Для процедуры двумерной автокорреляции выбирался участок скана размером 15 × 15 мкм, так чтобы по возможности исключить влияние топографических артефактов на сигнал пьезоотклика. Артефакты неизбежно возникают при сканировании по методике силовой микроскопии пьезоотклика. Форма двухмерной пространственной автокорреляционной функции для амплитуды сигнала пьезоотклика с поверхности титаната стронция (рис. 3, *б*) соответствует изотропному распределению полярных областей. Подобная форма автокорреляционной функции свидетельствует об отсутствии дальнего порядка в распределении сегнетоэластических свойств. Наличие симметричного пика говорит об отсутствии выделенного направления ориентации полярных доменов в плоскости образца.

На рис. 3, *а* представлена температурная зависимость длины автокорреляции по срезу автокорреляционной функции, где хорошо выделяется пик, максимум которого локализован при $T = 55$ K. Наличие максимума на температурной зависимости автокорреляционной функции для амплитуды сигнала пьезоотклика свидетельствует об изменении латеральных размеров доменов с температурой. Интересно, что расположение максимума автокорреляционной функции приблизительно соответствует температурам, при которых предположительно возникает «состояние Мюллера». Таким образом, можно предположить, что наличие когерентного квантового состояния при низ-

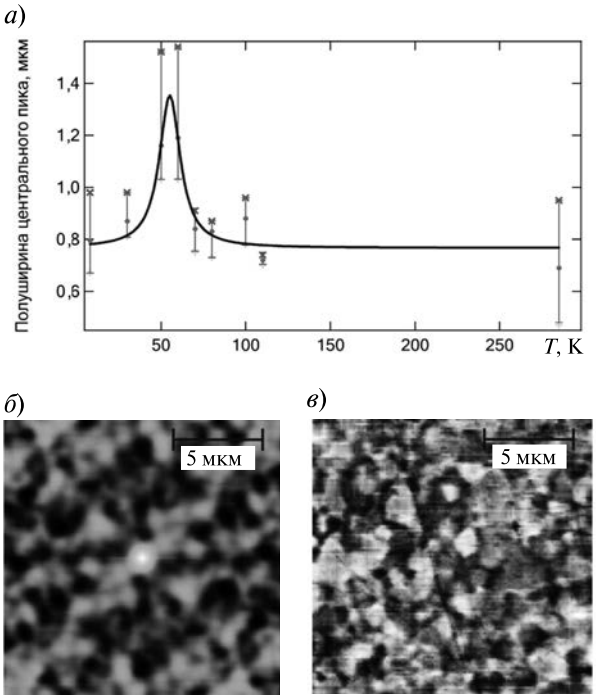


Рис. 3. Процедура автокорреляционного анализа распределения амплитуды сигнала пьезоотклика:
а – температурная зависимость длины пространственной автокорреляционной функции амплитуды сигнала пьезоотклика;*б* – двумерная автокорреляционная функция для пространственного распределения сигнала пьезоотклика, приведенного на рис. 3, *в*.
Размер области сканирования 15 × 15 мкм, $T = 110$ K

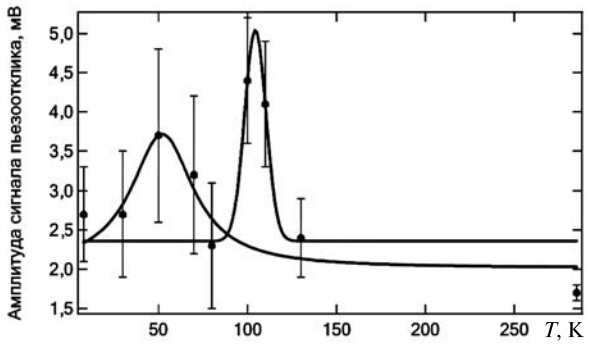


Рис. 4. Температурная зависимость среднего уровня амплитуды сигнала пьезоотклика с поверхности керамики титаната стронция

ких температурах косвенно подтверждается результатами автокорреляционного анализа экспериментальных данных по исследованию распределения сегнетоэластических свойств на поверхности керамики титаната стронция.

Анализ температурной зависимости среднего уровня амплитуды сигнала пьезоотклика (рис. 4) выявил наличие двух хорошо разрешаемых пиков при температурах 50 и 105 K. Полуширина пика при $T = 50$ K больше полуширины пика при $T = 105$ K, последняя составляет 15 K. Расположение пиков по температуре позволяет сделать вывод о том, что пик на этой зависимости соответствует пику на другой температурной зависимости – длины пространственной автокорреляционной функции амплитуды сигнала пьезоотклика. Оба локализованы при $T = 50$ K. Следовательно «состояние Мюллера» проявляется как посредством изменения (увеличения) латеральных размеров полярных доменов, так и увеличения уровня амплитуды сигнала пьезоотклика с поверхности. Второй пик на температурной зависимости рис. 4, расположенный при $T = 105$ K, может указывать на происходящий при данной температуре сегнетоэластический фазовый переход с изменением симметрии ячейки.

Четкая локализация и острота второго пика может рассматриваться в качестве дополнительного аргумента в пользу структурного фазового перехода, который сопровождается повышением уровня сигнала пьезоотклика.

Итак, в работе представлены результаты исследований динамики сегнетоэластических свойств поверхности керамики титаната стронция при низких температурах, полученной по методике силовой микроскопии пьезоотклика. Проведенный анализ экспериментальных данных выявил повышение уровня амплитуды сигнала пьезоотклика с поверхности образца и увеличение латеральных размеров полярных областей при температурах, соответствующих возникновению когерентного квантового состояния – «состояния Мюллера» в титанате стронция. В диапазоне температур структурного фазового перехода наблюдалось возникновение фазового контраста на фазе сигнала пьезоотклика и повышение среднего уровня амплитуды сигнала пьезоотклика. Логично предположить, что подобные изменения сегнетоэластических свойств могут быть связаны с перестройкой поверхностной структуры титаната стронция при сегнетоэластическом фазовом переходе.

Работа выполнена при финансовой поддержке государства в лице Министерства образования и науки РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Квятковский, О.Е.** Квантовые эффекты в виртуальных и низкотемпературных сегнетоэлектриках [Текст] / О.Е. Квятковский // ФТТ. – 2001. – Т. 43 (8). – С. 1345 – 1362.

2. **Sorge, G.** Mechanical relaxation and nonlinearity in strontium titanate single crystal [Text] / G. Sorge, E. Hegenbarth, G. Schmidt // Phys. Stat. Sol. (b). – 1970. – Vol. 37 (2). – P. 599 – 603.

3. **Muller, K.A**. Indication for a novel phase in the quantum paraelectric regime of $SrTiO_3$ [Text] / K.A. Muller, W. Berlinger, E. Tosatti // Z. Phys. B. – Condensed Matter. – 1991. – Vol. 84. – P. 277 – 283.

4. **Nes, O.-M.** Elastic anomalies in the quantum paraelectric regime of $SrTiO_3$ [Text] / O.-M. Nes, K.A. Muller, T. Suzuki, F. Fossheim // Europhys. Lett. – 1992. – Vol. 19. – P. 397 – 403.

5. **Balashova, E.V.** Ultrasonic study on the tetragonal and Muller phase in $SrTiO_3$ [Text] / E.V. Balashova, V.V. Lemanov, R. Kunze [et al.] // Ferroelectrics. – 1996. – Vol. 183. – P. 75 – 83.

6. **Muller, K.A.** Macroscopic quantum phenomena [Text] / K.A. Muller // erroelectrics. – 1996. – Vol. 183. – P. 11 – 24.

7. **Curtens, E.** Is there an unusual condensation in quantum paraelectrics? [Text] / E. Curtens // Ferroelectrics. – 1996. – Vol. 183. – P. 25 – 38.

8. **Neville, R.C.** Permittivity of strontium titanate [Text] / R.C. Neville, B. Hoeneisen, C.A. Mead // J. Appl. Phys. – 1972. – Vol. 43 (5). – P. 2124 – 2135.

9. **Kholkin, A.** Room temperature surface piezoelectricity in $SrTiO_3$ ceramics via piezoresponse force microscopy [Text] / A. Kholkin, I. Bdikin, T. Ostapchuk, J. Petzelt // Appl. Phys. Lett. – 2008. – Vol. 93. – P. 222905-1 – 222905-3.

10. **Таганцев, А.К.** Пиро-, пьезо-, флексоэлектрический и термополяризационный эффекты в ионных кристаллах [Текст] / А.К. Таганцев // УФН. – 1987. – Т. 152. – С. 423 – 448.

УДК 535.374

В.В. Коренев, А.В. Савельев, А.Е. Жуков, А.В. Омельченко, М.В. Максимов

МОДЕЛЬ ОДНОВРЕМЕННОЙ ГЕНЕРАЦИИ ЧЕРЕЗ ОСНОВНОЕ И ВОЗБУЖДЕННОЕ СОСТОЯНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЛАЗЕРАХ НА КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ

Для решения целого ряда практически важных задач (таких как оптическая передача информации, накачка рамановских волоконных усилителей и томография), требуется эффективный полупроводниковый лазер, обладающий широким спектром излучения вблизи длины волны 1,3 мкм. Использование самоорганизующихся квантовых точек (КТ) InAs/InGaAs позволяет реализовать лазеры требуемого спектрального диапазона, обладающие при этом низкими пороговыми токами и высокой характеристической температурой [1 – 2].

Известно, что если оптические потери не слишком велики, то лазерная генерация происходит на основном оптическом переходе квантовых точек. Однако даже если генерация началась на основном оптическом переходе, то в спектрах лазерной генерации при достаточно большой накачке появляется коротковолновая полоса, обусловленная первым возбужденным переходом в КТ [3 – 8]. Это явление получило название двухуровневой генерации. Заметим, что в большинстве случаев полезную мощность лазера на КТ представляет та ее часть, которая отвечает излучению через основные состояния КТ, поскольку возбужденные оптические переходы обладают заметно меньшей длиной волны.

Целью настоящей работы является адекватное описание имеющихся ватт-амперных характеристик и спектральных составляющих мощности, излучаемой лазерами на КТ в режиме двухуровневой генерации.

Гашение генерации на основном оптическом переходе

Режим двухуровневой генерации (double-state lasing) реализует собой такой случай, когда вклад в лазерное излучение одновременно вносят как основные, так и возбужденные оптические переходы КТ. В первых теоретических работах [3, 4], посвященных описанию данного явления, возникновение излучения на возбужденном оптическом переходе приписывалось малой скорости релаксации носителей заряда с первого возбужденного на основное состояние КТ. В связи с этим, увеличение тока накачки выше порога генерации приводит к постепенному росту степени заполнения возбужденных состояний. Это в свою очередь приводит к тому, что усиление на возбужденном оптическом переходе растет вплоть до достижения порога двухуровневой генерации. В то же время при значениях тока накачки, превышающих порог двухуровневой генерации, цитированные работы предсказывают насыщение мощности, излучаемой на основном оптическом переходе. Это, однако, противоречит многочисленным наблюдениям [5 – 8], в которых отмечалось уменьшение мощности основного оптического перехода за порогом двухуровневой генерации, вплоть до полного гашения генерации на основном переходе.

Гашение генерации на основном оптическом переходе объяснялось либо ростом температуры активной области лазера (саморазогрев) [5], либо увеличением однородного уширения с ростом накачки [6]. Однако детальное экспериментальное исследование [7] показало, что ни одна из указанных причин не может быть ответственна за наблюдаемое поведение.

В работе [8] указанный эффект связывается с близостью основного и первого возбужденного дырочных уровней, различающихся по энергии на величину около 5 – 6 мэВ. Вследствие эффективного обмена дырками между этими уровнями при комнатной температуре, их можно рассматривать как один эффективный уровень энергии, описываемый единой функцией распределения (рис. 1).

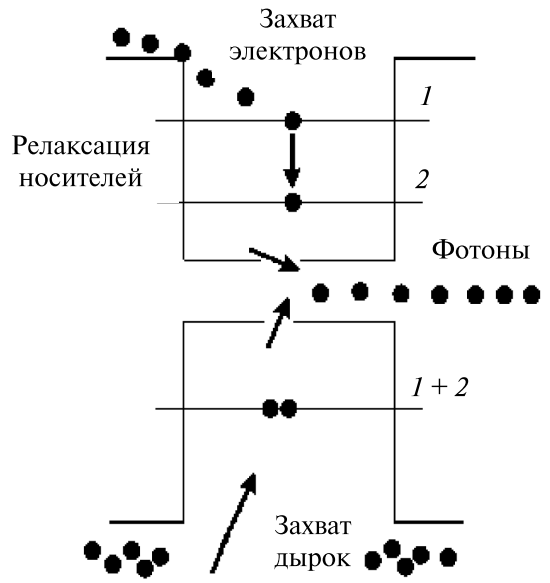


Рис. 1. Уровни энергии в квантовой точке:
1, *2* – основной и первый возбужденный электронные,
(*1* + *2*) – эффективный дырочный

В этом случае в режиме двухуровневой генерации электроны, заселяющие как основной, так и первый возбужденный уровни энергии КТ, конкурируют между собой за одни и те же дырки. Причем после начала генерации на возбужденном оптическом переходе дырочный уровень опустошается гораздо интенсивнее, чем в случае генерации только через основные состояния КТ. Вследствие большей степени вырождения возбужденного электронного уровня энергии, по сравнению с основным, возбужденный оптический переход имеет преимущество перед основным, что и приводит к уменьшению интенсивности излучения на последнем. Однако, как будет показано далее, учет только близости дырочных уровней в КТ недостаточен для количественного описания экспериментальных результатов, поскольку предсказываемое в этом случае значение тока, при котором происходит гашение генерации на основном переходе, оказывается существенно больше наблюдаемого на практике.

Модель двухуровневой генерации

Предлагаемая в настоящей работе модель двухуровневой генерации основывается на предположении, что электроны и дырки захватываются на возбужденные уровни КТ независимо друг от друга, причем темп захвата дырок меньше темпа захвата электронов. Последнее допущение представляется вполне естественным, поскольку темп захвата носителей в КТ пропорционален скорости их теплового движения в матрице [9], а ее величина у дырок оказывается меньше, чем у электронов, так как эффективная масса дырок в несколько раз превосходит эффективную массу электронов.

Считая, что захват носителей заряда на основные уровни КТ происходит с возбужденных уровней, в отсутствие неоднородного уширения имеем систему скоростных уравнений, количественно описывающих динамику носителей в одиночной КТ:

$$\dot{f}_{e1} = \frac{D_2}{D_1}\left[g_{e21} f_{e2}\left(1-f_{e1}\right) - g_{e12} f_{e1}\left(1-f_{e2}\right)\right] - \frac{P_1}{D_1}; \quad (1)$$

$$\dot{f}_{e2} = g_{ec}\left(1-f_{e2}\right) - g_{ee} f_{e2} - g_{e21} f_{e2}\left(1-f_{e1}\right) + g_{e12} f_{e1}\left(1-f_{e2}\right) - \frac{P_2}{D_2}; \quad (2)$$

$$\dot{f}_h = g_{hc}\left(1-f_h\right) - g_{he} f_h - \frac{P_1+P_2}{D_1+D_2}, \quad (3)$$

где P_1, P_2 – скорости стимулированного излучения основным и первым возбужденным состояниями КТ; D_1, D_2 – их степени вырождения; g_{e12}, g_{e21} – скорости перехода электронов с основного на первое возбужденное состояние и обратно; $g_{e(h)c}$, $g_{e(h)e}$ – темпы захвата и выброса электронов (дырок); f_{e1}, f_{e2} – степени заполнения основного и возбужденного электронных, а f_h – основного дырочного состояний КТ.

В системе уравнений (1) – (3) не учитывается спонтанная рекомбинация, поскольку ее темп существенно ниже темпов рассматриваемых процессов.

Для расчета ватт-амперных характеристик систему скоростных уравнений (1) – (3) необходимо дополнить набором условий (4) – (7), отвечающих возможным режимам генерации:

$$P_1 = 0;\ P_2 = 0; \quad (4)$$

$$\gamma_1 = f_{e1} + f_h - 1;\ P_2 = 0; \quad (5)$$

$$\gamma_1 = f_{e1} + f_h - 1;\ \gamma_2 = f_{e2} + f_h - 1; \quad (6)$$

$$P_1 = 0;\ \gamma_2 = f_{e2} + f_h - 1, \quad (7)$$

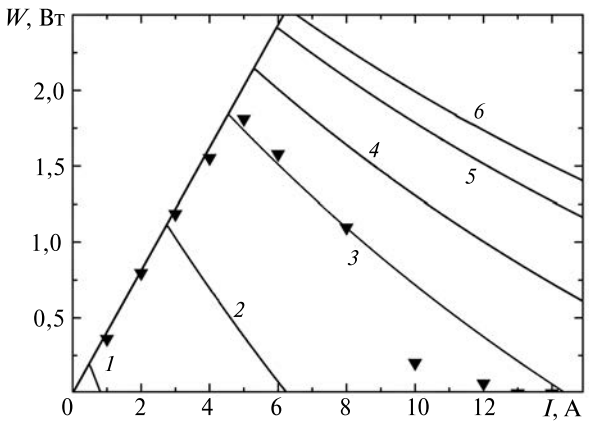


Рис. 2. Теоретические зависимости мощности, излучаемой на основном оптическом переходе, от тока накачки при различных значениях отношения темпов захвата электронов и дырок в квантовые точки $h = g_{hc} / g_{ec}$: 0,35(*1*); 0,55(*2*); 0,75(*3*); 0,85(*4*); 0,95(*5*); 1,00(*6*);
значение h = 0,75 – оптимальное; символами отмечена экспериментальная кривая

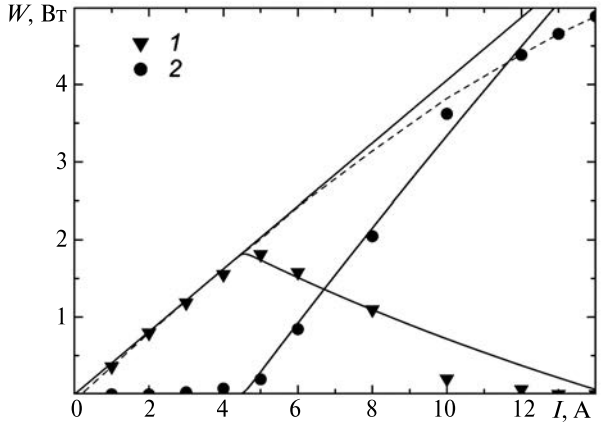


Рис. 3. Сравнение экспериментальных ватт-амперных характеристик (символы) и их теоретической аппроксимации (сплошные линии) для мощности, излучаемой через оптические переходы КТ в широком диапазоне токов накачки:
1, *2* – мощности, излучаемые через основной и первый возбужденный оптические переходы соответственно; пунктир – их сумма

где γ_1, γ_2 – инверсии заселенностей основного и первого возбужденного состояний КТ в режиме стационарной генерации.

Условие (4) отвечает отсутствию лазерной генерации, (5) – генерации лишь на основном переходе, (6) – двухуровневой генерации, а (7) – генерации лишь через возбужденные состояния КТ после гашения генерации через их основные состояния.

Решение системы (1) – (7) в стационарном режиме позволяет найти темпы стимулированного излучения основным и первым возбужденным оптическими переходами одиночной КТ – $P_{1,2}$, связанные в отсутствие неоднородного уширения с мощностью генерации $W_{1,2}$ согласно работе [10], как

$$W_{1,2} = \frac{\alpha_{out}}{\alpha_{in} + \alpha_{out}} E_{1,2} P_{1,2}, \qquad (8)$$

где α_{in}, α_{out} – внутренние потери и потери на вывод лазерного излучения; E_1, E_2 – энергии основного и первого возбужденного оптических переходов. На рис. 2 представлено влияние соотношения h между темпами захвата электронов и дырок на генерацию через основные состояния КТ для лазерной структуры, исследованной в [7]; ее основные параметры: $g_{ee} = 219{,}0$ нс$^{-1}$; $g_{he} = 19{,}0$ нс$^{-1}$; $g_{e21} = 0{,}8$ пс$^{-1}$; $\gamma_1 = 0{,}75$; $\gamma_2 = 0{,}375$; $\alpha_{in} = 1{,}5$ см$^{-1}$; $\alpha_{out} = 3{,}12$ см$^{-1}$; $D_1 = 2$; $D_2 = 4$; $E_1 = 990$ мэВ; $E_2 = 1100$ мэВ.

Согласно расчетам, мощность, излучаемая через основные оптические переходы КТ, возрастает с увеличением тока накачки до порога двухуровневой генерации, после чего начинает спадать вплоть до ее полного гашения. Видно, что порог двухуровневой генерации, а также ток накачки, отвечающий гашению генерации на основном переходе, оказываются весьма чувствительными к величине отношения темпов захвата электронов и дырок. Увеличение разницы между темпами захвата приводит к снижению как диапазона токов, в котором имеет место генерация на основном переходе, так и наибольшей мощности, излучаемой через основные состояния КТ.

На рис. 3 приведена ватт-амперная характеристика, полученная в работе [7] экспериментально, а также ее теоретическая аппроксимация, построенная для случая $h \equiv g_{hc} / g_{ec} = 0{,}75$ при тех же значениях параметров, что использовались для расчета теоретических зависимостей, приведенных на рис. 2.

Видно, что наблюдается не только превосходное качественное, но и хорошее количественное соответствие между экспериментальными и расчетными зависимостями в широком диапазоне токов накачки. В то же время расхождение, имеющееся при токах накачки свыше 10 А, может быть приписано электрон-электронному взаимодействию и требует дальнейшего исследования.

Отметим, что учет только близости дырочных уровней в КТ, как это ранее предполагалось в работе [8], при равенстве темпов захвата электронов и дырок (см. кривую *б* на рис. 2) дает значения максимальной мощности основного перехода, порога двухуровневой генерации и тока гашения генерации на основном переходе, завышенные примерно на 40–50%.

Таким образом, впервые исследовано влияние различия в темпах захвата электронов и дырок в КТ на ватт-амперную характеристику и ее спектральные составляющие в лазерах на КТ. Показано, что токи, отвечающие началу двухуровневой генерации и гашению лазерной генерации на основном переходе, а также максимальная мощность, излучаемая через основные состояния КТ, оказываются очень чувствительными к величине отношения темпов захвата электронов и дырок. Поэтому при расчете лазерных структур на КТ необходимо также принимать во внимание локальное распределение носителей в матрице, влияющее на темпы их захвата в КТ. Наилучшее соответствие расчетов и экспериментальных данных получено при отношении темпов захвата электронов и дырок, равном 0,75.

Работа выполнена при поддержке программ фундаментальных исследований Президиума РАН и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zhukov, A.E.** Quantum dot diode lasers for optical communication systems [Text] / A.E. Zhukov, A.R. Kovsh // Quantum Electronics. – 2008. – Vol. 38. – P. 409–423.

2. **Жуков, А.Е.** Инжекционные лазеры с широким спектром генерации на основе самоорганизующихся квантовых точек [Текст] / А.Е. Жуков, А.Р. Ковш, Ж.И. Алферов [и др.] // ФТП. – 2007. – Т. 41. – С. 625–630.

3. **Jiang, Li.** Excited-state-mediated capture of carriers into the ground state and the saturation of optical power in quantum-dot lasers [Text] / Li Jiang, L.V. Asryan // IEEE Photonics Technology Letters. – 2006. – Vol. 18. – P. 2611–2613.

4. **Shi, L.W.** Effect of inter-level relaxation and cavity length on double-state lasing performance of quantum dot lasers [Text] / L.W. Shi, Y.H. Chen, B. Xu [et al.] // Physica E. – 2007. – Vol. 39. – P. 203–208.

5. **Kim, Y.** Thermally dependent characteristics and spectral hole burning of the double-lasing, edge-emitting quantum-dot laser [Text] / Y. Kim, Y. Joshi, A. Fedorov // J. Appl. Phys. – 2010. – Vol. 107. – P. 073104(1–7).

6. **Sugawara, M.** Modeling room-temperature lasing spectra of 1.3-μm self-assembled InAs/GaAs quantum-dot lasers: Homogeneous broadening of optical gain under current injection [Text] / M. Sugawara, N. Hatori, H. Ebe [et al.] // J. Appl. Phys. – 2005. – Vol. 97. – P. 043523 (1–8).

7. **Жуков, А.Е.** Особенности одновременной генерации через основное и возбужденное состояния в лазерах на квантовых точках [Текст] / А.Е. Жуков, М.В. Максимов, Ю.М. Шерняков [и др.] // ФТП. – 2012. – Т. 46. – С. 241–246.

8. **Viktorov, E.A.** Electron-hole asymmetry and two-state lasing in quantum dot lasers [Text] / E.A. Viktorov, P. Mandel, Y. Tanguy [et al.] // Applied Physics Letters. – 2005. – Vol. 87. – P. 053113 (1–3).

9. **Asryan, L.V.** Inhomogeneous line broadening and the threshold current density of a semiconductor quantum dot laser [Text] / L.V. Asryan, R.A. Suris // Sem. Sci. Tech. – 1996. – Vol. 11. – P. 554–567.

10. **Коренев, В.В.** Влияние неоднородного уширения и преднамеренно внесенной неупорядоченности на ширину спектра генерации лазеров на квантовых точках [Текст] / В.В. Коренев, А.В. Савельев, А.Е. Жуков [и др.] // ФТП. – 2012. – Т. 46. – С. 701–707.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УДК 538.945

М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев

ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРНОГО ФАКТОРА НА КОНФИГУРАЦИЮ ЛИНЕЙНЫХ ВИХРЕЙ В ТРЕХМЕРНОЙ УПОРЯДОЧЕННОЙ ДЖОЗЕФСОНОВСКОЙ СРЕДЕ

Одной из важнейших проблем в физике высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) является анализ структуры, движения и пиннинга вихрей, возникающих в образце при внесении его во внешнее магнитное поле. Исследованию вихрей посвящено значительное количество работ [1–7]. Например, в статьях [3, 4] анализируется поведение одномерных вихрей в длинном джозефсоновском контакте. Однако при этом рассмотрении распределение фазы у вихря предполагается непрерывным в пространстве, а его пиннинг обусловлен взаимодействием с дискретно расположенными центрами пиннинга. На самом же деле джозефсоновская среда представляет собой ячеистую структуру, что уже само по себе обусловливает пиннинг; последний определяется энергией, необходимой для перемещения центра вихря из одной ячейки в другую.

В работе [5] проведен анализ поведения вихря в линейной цепочке СКВИД. Однако рассмотрение ведется для двумерного случая, т. е. магнитное поле отдельной петли учитывается лишь в магнитном потоке, который ее пронизывает. Для трехмерного случая вихрь представляет собой систему коаксиальных «соленоидов», поэтому магнитный поток через петлю создается не только ею самой, но и другими токовыми участками, в том числе достаточно удаленными. С уменьшением критического тока контакта растет размер вихря, т. е. число петель, принимающих участие в формировании магнитного потока через центральную ячейку вихря; это компенсирует уменьшение вклада в магнитный поток от каждой петли.

В работе [7] была получена система уравнений квантования флюксоида в ячейках для трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды, содержащая два безразмерных параметра I и b, смысл которых будет понятен из дальнейшего изложения. На базе этих уравнений в работе [8] проведен расчет равновесных конфигураций линейного вихря в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде и построены зависимости энергии пиннинга вихря, а также его магнитной и джозефсоновской энергий от величины критического тока джозефсоновского контакта. Расчет проводился в широком диапазоне значений параметра I, при этом для простоты расчета параметр b предполагался равным нулю. В частности, в указанной работе рассматривался случай значений I, при которых $Ib << 1$.

Цель настоящей работы – выполнение аналогичной программы для случая линейного вихря в трехмерной джозефсоновской среде при разных значениях b. Поскольку, как будет видно из дальнейшего, параметр b принимает значения от

0,049 до 0,454, для $I < 0{,}25$, при которых $Ib << 1$, будет справедлив подход, описанный в статье [8]. Поэтому в данной работе будет рассматриваться случай $I > 0{,}25$.

Расчет структуры и энергии линейного вихря

Рассмотрение будем проводить на модели, представляющей собой кубическую решетку с периодом a, состоящую из сверхпроводящих проводов радиусом δ, каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт, причем все контакты имеют малые размеры и обладают одной и той же величиной критического тока J_c. Токовое распределение имеет плоскую структуру, т. е. во всех параллельных плоскостях, перпендикулярных оси вихря и расположенных на расстоянии a друг от друга, токи распределены идентично. Такая модель, являясь в достаточной степени простой, позволяет сделать определенные выводы о структуре вихрей, их пиннинге и динамике.

Рассмотрим возможность существования вдали от границы образца изолированного самоподдерживающегося линейного вихря при отсутствии внешнего магнитного поля. Из соображений симметрии следует, что равновесные конфигурации могут быть трех видов в зависимости от расположения центра вихря: либо он находится в центре одной из ячеек, либо на одном из контактов, либо на пересечении проводов. Однако подробный анализ показывает, что последний вариант решения не имеет.

Рассмотрим подробно обе равновесные конфигурации линейного вихря.

Центр вихря в центре ячейки – конфигурация А. Сечение части такого вихря плоскостью, перпендикулярной его оси, показано на рис. 1. Вихрь обладает осевой симметрией, а также четырьмя плоскостями симметрии, проходящими через центр левой нижней ячейки: вертикальная, горизонтальная и две диагональные. На этой основе можно построить все сечение вихря. В каждой из ячеек выполняется условие квантования флюксоида:

$$2\pi\frac{\Phi_m}{\Phi_0}+\sum_k \varphi_k^{(m)} = 2\pi K_m, \qquad (1)$$

где $\sum_k \varphi_k^{(m)}$ – сумма скачков фазы на джозефсоновских элементах m-ой ячейки; Φ_m – полный магнитный поток через m-ю ячейку; Φ_0 – квант магнитного потока; K_m – целое число, равное 1 для центральной ячейки вихря (с током i_0) и нулю для всех остальных.

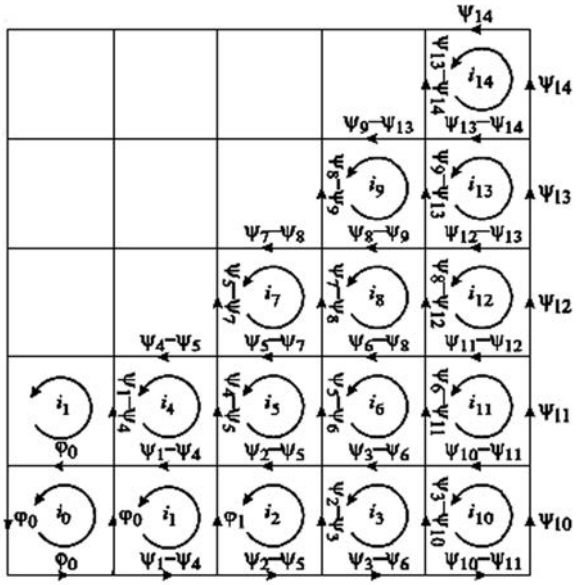


Рис. 1. Распределение токов и скачков фазы на контактах для конфигурации А вихря в плоскости, перпендикулярной его оси.
Над каждым контактом указан скачок фазы, выраженный через ψ_m. Ячейка с i_0 содержит 1 квант магнитного потока Φ_0, все остальные квантов не содержат

Величины джозефсоновских токов $J_k = J_c \sin\varphi_k$ по мере удаления от центра вихря убывают. Мы будем рассматривать лишь такие конфигурации, в которых $\varphi_k << 1$, т. е. $\sin\varphi_k \approx \varphi_k$ для всех φ_k, кроме самых больших по величине скачков фазы φ_0 и φ_1 в ближайших к центру ячейках (см. рис. 1). Справедливость этого предположения будет подтверждена далее. Чтобы избежать выписывания условий баланса токов в узлах, удобно воспользоваться методом «контурных токов» ячеек. Пусть в каждой ячейке с номером m протекает контурный ток $i_m = J_c\psi_m$, где ψ_m – «контурный» скачок фазы. Тогда значения скачков фазы φ_k на контактах (кроме φ_0 и φ_1) определяются как разности соответствующих «контурных» значений (см. рис. 1).

Вычислим вклад в магнитный поток через ячейку от бесконечного числа токов, расположенных один под другим и протекающих по одной из ее границ (рис. 2). Вертикальная проекция B_z поля, созданного элементом, на-

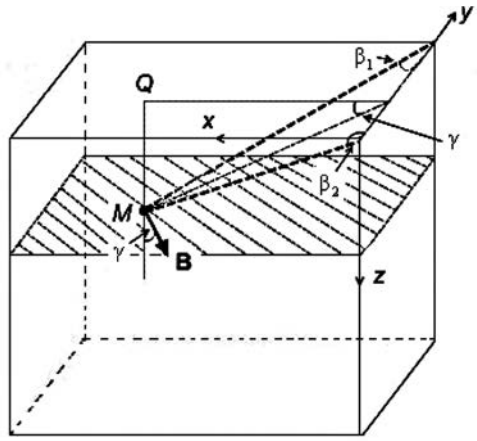


Рис. 2. Геометрия ячейки для расчета индукции магнитного поля **B**:
M – точка нахождения элемента ячейки; площадь сечения ячейки в направлении, перпендикулярном оси вихря, заштрихована

ходящимся в точке M на расстоянии $z = na$ по вертикали от плоскости ячейки, следует выражению

$$B_z = B\cos\gamma = \frac{\mu_0 I}{4\pi(x^2+(na)^2)^{0,5}}\times$$
$$\times\left(\cos\beta_1+\cos\beta_2\right)\cos\gamma =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi(x^2+(na)^2)^{0,5}}\times$$
$$\times\left(\frac{y}{(x^2+y^2+(na)^2)^{0,5}}+\frac{a-y}{(x^2+(a-y)^2+(na)^2)^{0,5}}\right)\times$$
$$\times\frac{x}{(x^2+(na)^2)^{0,5}}.$$

Проинтегрировав по площади ячейки, получим выражение для вклада в поток от элемента:

$$\Phi(n) = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left[\left(2(1-\alpha)^2+n^2\right)^{0,5}-\right.$$
$$\left.-2\left(\alpha^2+(1-\alpha)^2+n^2\right)^{0,5}+\left(2\alpha^2+n^2\right)^{0,5}\right]+$$
$$+\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\times$$
$$\times\ln\frac{\left(\left(2(1-\alpha)^2+n^2\right)^{0,5}-1+\alpha\right)\left(\left(\alpha^2+(1-\alpha)^2+n^2\right)^{0,5}+1-\alpha\right)}{\left(\left(2(1-\alpha)^2+n^2\right)^{0,5}+1-\alpha\right)\left(\left(\alpha^2+(1-\alpha)^2+n^2\right)^{0,5}-1+\alpha\right)}-$$
$$-\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\cdot\frac{\alpha}{2}\ln\frac{\left(\left(2\alpha^2+n^2\right)^{0,5}+\alpha\right)\left(\left(\alpha^2+(1-\alpha)^2+n^2\right)^{0,5}-\alpha\right)}{\left(\left(2\alpha^2+n^2\right)^{0,5}-\alpha\right)\left(\left(\alpha^2+(1-\alpha)^2+n^2\right)^{0,5}+\alpha\right)},$$

где $\alpha = \delta / a$.

Просуммировав по n от $-\infty$ до $+\infty$, найдем искомый поток через ячейку. Представим его в виде

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{a}(a-2\delta)^2\left(\frac{1}{4}+b_L\right).$$

Параметр b_L, как и структурный фактор

$$b = \left[2\pi(1-2\alpha)\right]^{-1}\ln(E/D),$$

где

$$E = 1-\exp\left[2\pi(1-\alpha)\right],\ D = 1-\exp\left[-2\pi\alpha\right],$$

приведенный в статье [6], связан с неоднородностью поля в ячейках вследствие дискретности распределения токов. Если бы поле было однородным, то фактор b_L был бы равен нулю. Тогда полный поток через ячейку от токов по всем четырем границам следовал бы выражению

$$BS = \frac{\mu_0 I}{a}(a-2\delta)^2,$$

как и должно быть.

Расчет показывает, что при всех значениях α величина b_L на 5–7% меньше b. Но фактор b соответствует учету неоднородности от поля, созданного бесконечно длинными токами, а b_L – только неоднородности от участка, ограничивающего ячейку. Следовательно, вклад от остальных участков мал и им можно пренебречь в целях упрощения анализа. Далее будем считать значение b_L равным b. В работе [6] показано, что с ростом отношения δ / a структурный фактор b уменьшается и все его практически значимые величины, соответствующие $0,01 \le \delta / a \le 0,50$, находятся в диапазоне от 0,049 до 0,454.

Магнитный поток через m-ю ячейку можно записать в следующем виде [6]:

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 S}{a}\left(i_m + b\sum_k J_k^{(m)}\right)\ (m \ne 0), \qquad (2)$$

где $\sum_k J_k^{(m)}$ – алгебраическая сумма токов контактов m-ой ячейки, S – площадь ячейки.

В отличие от рассмотрения, приведенного в работе [8], где для простоты изучался случай $Ib << 1$ (I – параметр пиннинга, определяемый выражением (4)), в настоящей статье рассмотрим все возможные значения b и I.

Подставим выражение (2) в условие (1) и считаем, что контурные токи $i_m = J_c\psi_m$; тогда система уравнений квантования флюксоида (m – номер ячейки на рис. 1) имеет вид

$$\begin{aligned}
&I(4b+1)\psi_0 - 4bI\psi_1 + 4\varphi_0 = 2\pi \quad (m=0);\\
&\left[I(4b+1)+2\right]\psi_1 - Ib(\psi_0+\psi_2) -\\
&-2(Ib+1)\psi_4 + \varphi_1 - \varphi_0 = 0 \quad (m=1);\\
&\left[I(4b+1)+3\right]\psi_2 - Ib\psi_1 - \\
&-(Ib+1)(\psi_3+2\psi_5) - \varphi_1 = 0 \quad (m=2);\\
&\left[I(4b+1)+4\right]\psi_3 - (Ib+1)(\psi_2+2\psi_6) = 0 \quad (m=3);\\
&\left[I(4b+1)+4\right]\psi_4 - (Ib+1)(2\psi_1+2\psi_5) = 0 \quad (m=4)
\end{aligned} \tag{3}$$

и т. д.

Кроме того,

$$\sin\varphi_0 = \psi_0 - \psi_1;$$

$$\sin\varphi_1 = \psi_1 - \psi_2,$$

где

$$I = \frac{2\pi\mu_0 J_c S}{\Phi_0 a}. \tag{4}$$

Последние два уравнения в системе (3) получены из дополнительных условий

$$J_c \sin\varphi_0 = i_0 - i_1;$$

$$J_c \sin\varphi_1 = i_1 - i_2$$

для токов в контактах со скачками фазы φ_0 и φ_1 соответственно (φ_0 и φ_1 мы не считаем малыми).

Джозефсоновская энергия E_J единицы длины вихря такой конфигурации определяется выражением

$$\begin{aligned}
E_J = E_c a^{-1}\sum_k (1-\cos\varphi_k) = 4IE_0\big(4-\cos\varphi_0 -\\
-\cos\varphi_1 - \cos(\psi_2-\psi_3) - \cos\psi_3\big) +\\
+8IE_0\big(6-\cos(\psi_4-\psi_5) - \cos(\psi_5-\psi_6) -\\
-\cos\psi_6 - \cos(\psi_7-\psi_8) - \cos\psi_8 - \cos\psi_9\big) + \ldots .
\end{aligned} \tag{5}$$

Суммирование по k в выражении (5) ведется по всем джозефсоновским контактам. Здесь $E_c = \Phi_0 J_c/2\pi$ – энергия джозефсоновского контакта; $E_0 = \Phi_0^2/4\pi^2 a^2\mu_0$ – нормировочная постоянная.

Для расчета магнитной энергии E_H выражения из работы [8] применять нельзя, так как при их выводе использовался факт однородности поля. В рассматриваемом случае поле не является однородным (см. выражение (2)). Именно поэтому величина b отлична от нуля. Запишем выражение для магнитной энергии системы контурных токов

$$E_H = 0{,}5\sum_{m,n} L_{mn} i_m i_n,$$

где под током i_m подразумевается столбец из бесконечного числа контуров с контурным током i_m, расположенных один под другим в сечениях, перпендикулярных оси вихря. Здесь L_{mn} – матрица взаимных индуктивностей, определяемая из соотношения

$$\Psi_m = \frac{\Phi_m}{a} = \sum_n L_{mn} i_n,$$

где Ψ_m – полный магнитный поток (потокосцепление) через столбец.

Используя это соотношение, запишем выражение для магнитной энергии единицы длины вихря в виде

$$E_H = 0{,}5\sum_m i_m \sum_n L_{mn} i_n = \frac{1}{2a}\sum_m i_m \Phi_m.$$

Для конкретной конфигурации А это выражение примет вид

$$\begin{aligned}
E_H = 0{,}5I^2 E_0(\psi_0^2 + 4b\psi_0(\psi_0-\psi_1) +\\
+4(\psi_1^2 - b\psi_1(\psi_0+\psi_2+2\psi_4-4\psi_1) +\\
+\psi_2^2 - b\psi_2(\psi_1+\psi_3+2\psi_5-4\psi_2)+\ldots) +\\
+8(\psi_5^2 - b\psi_5(\psi_2+\psi_4+\psi_6+\psi_7-4\psi_5)+\ldots)).
\end{aligned} \tag{6}$$

Суммирование по m в выражении (6) ведется по всем ячейкам с учетом симметрии вихря (что приводит к коэффициенту 4 для ячеек, лежащих на центральных столбце и строке, и к коэффициенту 8 для всех остальных).

Переход от бесконечной системы (3) к конечной можно осуществить, если пренебречь токами, достаточно удаленными от центра (см. рис. 1). Размер квадрата, необходимого для рас-

чета, определяется следующим условием: изменения величин скачков фазы на контактах, близких к центру, должны быть малыми при увеличении размера квадрата.

Выразим ψ_0, ψ_1 и ψ_2 через φ_0 и φ_1 из линейных уравнений системы (3) и подставим их в два последних уравнения этой системы; тогда получим два нелинейных уравнения, в которых неизвестными являются φ_0 и φ_1. Кривые, которые описываются этими уравнениями, имеют одну точку пересечения – ей соответствуют значения φ_0 и φ_1, определяемые численным методом. Зная φ_0 и φ_1, находим и все ψ_m.

Расчет, проведенный для различных значений параметра b, показал, что контурные скачки фазы на всех контактах, кроме контактов со скачками фаз φ_0 и φ_1, меньше 0,5 при любых значениях параметров I и b, что подтверждает справедливость условия $\sin\varphi_k \approx \varphi_k$ при $k \neq 0$ и 1.

На рис. 3 представлены зависимости скачков фаз φ_0 и φ_1 от параметра I для минимального и максимального значений b. Видно, что с увеличением b значения φ_0 и φ_1, т. е. токи в центральной области, заметно уменьшаются. При всех значениях b для $I > 0{,}25$ величину φ_1 можно считать малой.

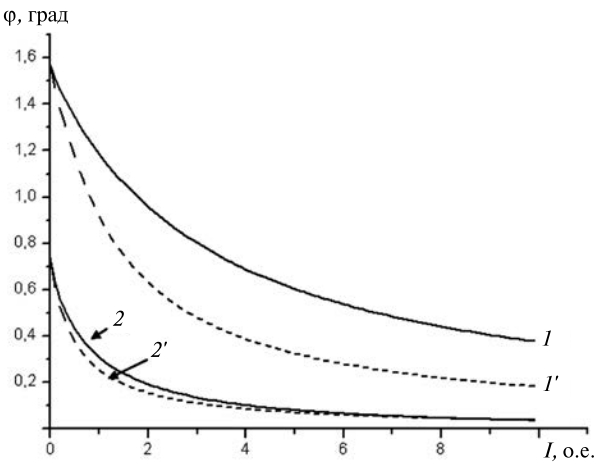


Рис. 3. Расчетные зависимости скачков фаз φ_0 (*1*, *1′*) и φ_1 (*2*, *2′*) от параметра I для значений параметра $b_{min} = 0{,}049$ (*1*, *2*) и $b_{max} = 0{,}454$ (*1′*, *2′*); размер ячейки 7×7

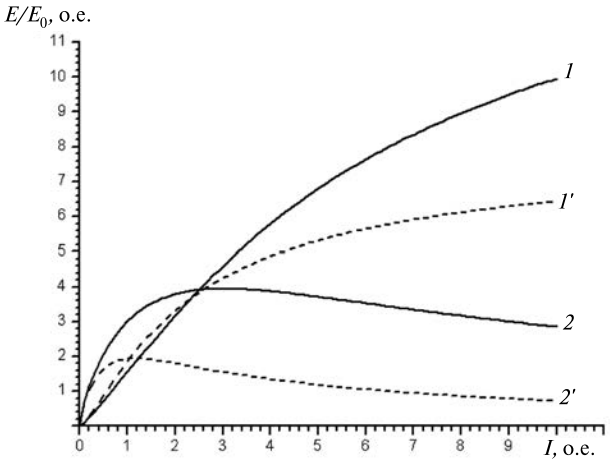


Рис. 4. Расчетные зависимости магнитной (*1*, *1′*) и джозефсоновской (*2*, *2′*) энергий от параметра I для значений $b_{min} = 0{,}049$ (*1*, *2*) и $b_{max} = 0{,}454$ (*1′*, *2′*); размер ячейки 7×7

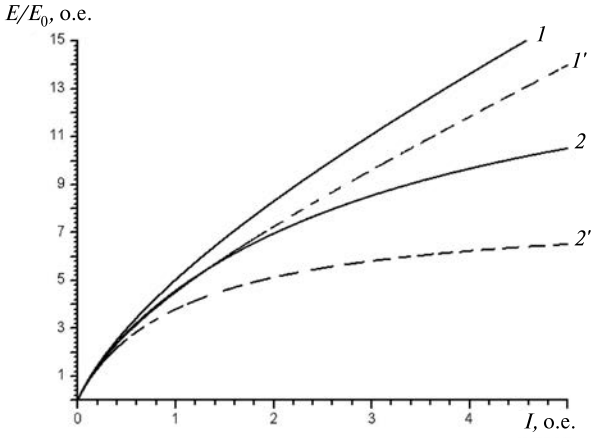


Рис. 5. Расчетные зависимости полной энергии линейного вихря для конфигураций B (*1*, *1′*) и A (*2*, *2′*) от параметра I для значений параметра $b_{min} = 0{,}049$ (*1*, *2*) и $b_{max} = 0{,}454$ (*1′*, *2′*); размеры ячеек 7×7 (A) и 7×8 (B)

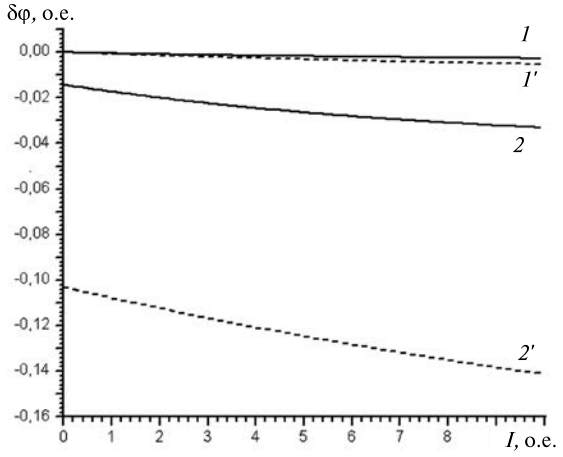


Рис. 6. Расчетные зависимости относительных отклонений $\delta\varphi$ для значений скачков фаз φ_0 (*1*, *1′*) и φ_1 (*2*, *2′*) от параметра I при увеличении размера квадрата от 5×5 до 7×7 (*1*, *2*) и от 3×3 до 5×5 (*1′*, *2′*); $b = 0{,}454$

На рис. 4 представлены зависимости от параметра I величин джозефсоновской и магнитной энергий E_J и E_H при разных b. Из хода кривых можно сделать следующие выводы:

при малых значениях I ($I < 0{,}25$) кривые для разных b совпадают, т. е. значения энергий не зависят от b. Этот результат соответствует выводам работы [8], где было показано, что при $Ib << 1$ можно считать b равным нулю;

чем больше значение b, тем меньше джозефсоновская энергия. Это выполняется при всех I;

магнитная энергия убывает с ростом величины b только при достаточно больших значениях I. При малых I зависимость обратная, т. е. с ростом параметра b магнитная энергия возрастает.

На рис. 5 представлены зависимости от параметра I полной энергии вихря для конфигураций А и В. Из графиков видно, что с ростом b полная энергия всегда уменьшается. При малых значениях I кривые для разных b совпадают, т. е. справедлив расчет, выполненный в работе [8], в котором b считается равным нулю.

Расчет проводился для квадрата размером 7×7 (11 уравнений) – по три ряда от центра вихря в каждую сторону. Результаты расчетов показали, что для исследования конфигурации А достаточно рассмотреть квадрат размером 5×5. Для подтверждения этого оценим правомочность пренебрежения квадратом 7×7, рассмотрев дополнительно квадраты 3×3 (4 уравнения) и 5×5 (7 уравнений). На рис. 6 приведены кривые относительных отклонений $\delta\varphi$ значений скачков фаз φ_0 и φ_1 при увеличении размера квадрата. Для сравнения взяты следующие величины:

$$\delta\varphi_0^{(1)} = 1 - \varphi_0^{(5\times5)} / \varphi_0^{(7\times7)};\ \delta\varphi_0^{(2)} = 1 - \varphi_0^{(3\times3)} / \varphi_0^{(5\times5)};$$

$$\delta\varphi_1^{(1)} = 1 - \varphi_1^{(5\times5)} / \varphi_1^{(7\times7)};\ \delta\varphi_1^{(2)} = 1 - \varphi_1^{(3\times3)} / \varphi_1^{(5\times5)}.$$

Подобные кривые для значений $b = 0{,}049$ и $0{,}454$ совпадают, поэтому они здесь не приведены.

Из представленных зависимостей следует, что уже квадрат 3×3 позволяет получать достаточно точные значения φ_0. Однако для расчета значений φ_1 квадрата 3×3 недостаточно ($\delta\varphi_1 \approx 12\ \%$), необходимо рассмотреть больший квадрат – 5×5. При переходе к еще большему квадрату (7×7) изменение значений φ_0 составляет менее 0,6 %. Это позволяет сделать вывод, что при сколь угодно малых значениях I для расчета структуры центральной части вихря можно ограничиться квадратом 5×5 при любых значениях параметра b.

Полученные результаты показывают, что линейный вихрь при любых значениях I имеет центральную часть размером в несколько ячеек, где скачки фазы, а значит и токи в контактах намного больше, чем в остальной области вихря. Можно сказать, что линейный вихрь всегда имеет в центре «бугорок» размером в несколько ячеек.

Подобная оценка для значений полной энергии вихря приведена на рис. 7. Для сравнения взяты величины

$$\delta E^{(1)} = 1 - E^{(3\times3)} / E^{(5\times5)};$$

$$\delta E^{(2)} = 1 - E^{(5\times5)} / E^{(7\times7)},$$

где δE – относительное отклонение значения полной энергии E при переходе к квадрату другого размера.

Из графиков видно, что для значения $I = 0{,}25$ изменение размера квадрата с 3×3 на 5×5 увеличивает полную энергию на 10 %, а с 5×5 на 7×7 – на 2,5 %. При больших величинах I ($I > 0{,}25$) разница в значении энергии еще меньше. Так же, как и в случае значений скачков фаз, для расчета полной энергии оказывается достаточным рассмотреть квадрат 5×5.

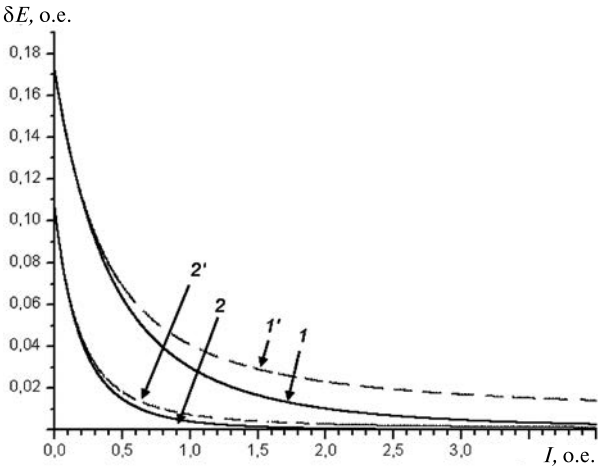


Рис. 7. Графики зависимостей относительных отклонений δE значений полной энергии E от параметра пиннинга I для значений параметра $b_{min} = 0{,}049$ (*1*, *2*) и $b_{max} = 0{,}454$ (*1'*, *2'*) при увеличении размера квадрата от 3×3 до 5×5 (*1*, *1'*) и от 5×5 до 7×7 (*2*, *2'*)

Наш подход для расчета магнитной и джозефсоновской компонент энергии вихря по формулам (5) и (6) верен при таких значениях параметра пиннинга I, при которых вихрь умещается в рассматриваемом квадрате (для выбранного квадрата 7×7 при $I > 0{,}25$). В работе [8], где рассматривался линейный вихрь при $Ib << 1$, показано, что расчет по формулам (5) и (6) справедлив при тех же значениях параметра пиннинга.

Центр вихря на контакте – конфигурация B. Такой вихрь имеет две плоскости симметрии (на рис. 8 им отвечают горизонтальная ось, проходящая между ячейками с контурным током i_0, и вертикальная – посредине ячейки с i_0). На этой основе можно построить полное сечение вихря. Из соображений симметрии следует, что на центральном контакте скачок фазы равен π, а на всех остальных контактах того же ряда – нулю (см. рис. 8). В результате расчета мы увидим, что при всех значениях параметра I можно считать малыми скачки фаз на всех контактах (так что $\sin\varphi_k \approx \varphi_k$), кроме $\varphi_1 \div \varphi_4$. Как и в предыдущем разделе, введем контурные токи $i_m = J_c\psi_m$. Это позволяет автоматически удовлетворить условиям баланса токов на всех узлах. Аналогично системе (3) получим при $b \neq 0$ следующую систему уравнений квантования флюксоида в ячейках (m – номер ячейки на рис. 8):

$$
\begin{aligned}
&I(3b+1)\psi_0 - Ib(2\psi_1+\psi_{10}) + \\
&+2\varphi_2+\varphi_1 = \pi \quad (m=0);\\
&\left[I(3b+1)+1\right]\psi_1 - Ib(\psi_0+\psi_2) - \\
&-(Ib+1)\psi_4+\varphi_4-\varphi_2 = 0 \quad (m=1);\\
&\left[I(3b+1)+2\right]\psi_2 - Ib\psi_1 - \\
&-(Ib+1)(\psi_3+\psi_5)-\varphi_4 = 0 \quad (m=2);\\
&\left[I(3b+1)+3\right]\psi_3-(Ib+1)(\psi_2+\psi_6)=0 \quad (m=3);\\
&\left[I(4b+1)+4\right]\psi_4 - \\
&-(Ib+1)(\psi_1+\psi_5+\psi_{10}+\psi_{12})=0 \quad (m=4)
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

и т. д.

К этим уравнениям надо добавить дополнительные условия:

$$J_c\sin\varphi_1 = i_0 - i_{10};$$

$$J_c\sin\varphi_2 = i_0 - i_1;$$

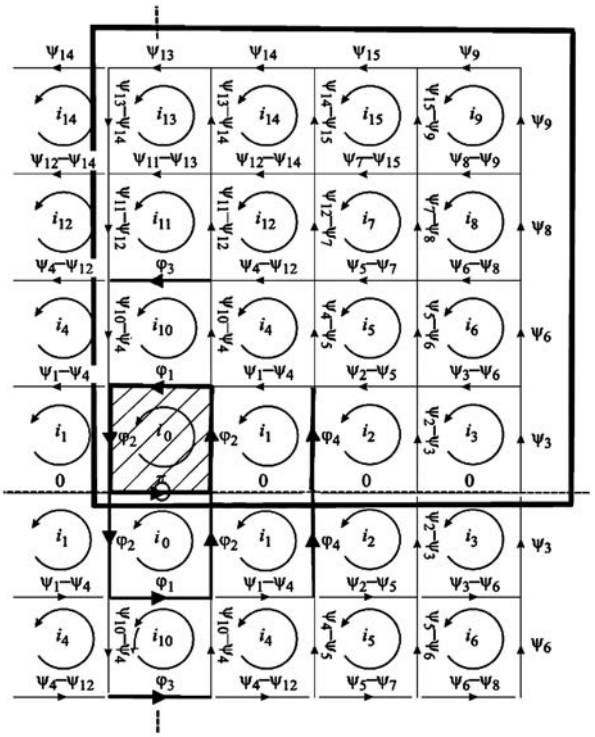


Рис. 8. Распределение токов и скачков фазы на контактах для конфигурации B. Штрихованная ячейка содержит 1 квант потока Φ_0, все остальные квантов не содержат

$$J_c\sin\varphi_3 = i_{10} - i_{11};$$

$$J_c\sin\varphi_4 = i_1 - i_2$$

для токов в контактах с $\varphi_1 \div \varphi_4$ (их мы не считаем малыми); далее

$$\sin\varphi_1 = \psi_0 - \psi_{10}; \qquad (8)$$

$$\sin\varphi_2 = \psi_0 - \psi_1; \qquad (9)$$

$$\sin\varphi_3 = \psi_{10} - \psi_{11}; \qquad (10)$$

$$\sin\varphi_4 = \psi_1 - \psi_2. \qquad (11)$$

Переход от бесконечной системы уравнений к конечной проводился так же, как и в рассмотренном ранее случае (токами, достаточно удаленными от центра, пренебрегали).

Система уравнений (7)–(11) отличается от системы (3) тем, что ее нельзя непосредственно свести к системе двух нелинейных уравнений, решаемой численно. Поэтому в данном случае воспользуемся методом последовательных при-

ближений. Для этого представим величины φ_3 и φ_4 и их синусы в виде

$$\varphi_3 = \varphi_3^0 + \delta_3;$$

$$\varphi_4 = \varphi_4^0 + \delta_4;$$

$$\sin\varphi_3 = \sin\varphi_3^0 + \delta_3\cos\varphi_3^0;$$

$$\sin\varphi_4 = \sin\varphi_4^0 + \delta_4\cos\varphi_4^0,$$

где φ_3^0 и φ_4^0 считаем известными величинами (на первой итерации равными нулю), а δ_3 и δ_4 являются новыми неизвестными (вместо φ_3 и φ_4), относительно которых система линейна.

Линейные уравнения относительно δ_3 и δ_4 выглядят следующим образом:

$$\sin\varphi_3^0 + \delta_3\cos\varphi_3^0 = \psi_{10} - \psi_{11}; \qquad (10a)$$

$$\sin\varphi_4^0 + \delta_4\cos\varphi_4^0 = \psi_1 - \psi_2. \qquad (11a)$$

В эти уравнения φ_3^0 и φ_4^0 входят как параметры. Так же, как и в случае конфигурации А, решение системы (7) достигалось выражением ψ_1, ψ_2, ψ_{10} и ψ_{11} через φ_1 и φ_2 из линейных уравнений системы (7). Затем при подстановке полученных выражений в уравнения (10) и (11) мы получали два нелинейных уравнения, в которых неизвестными были φ_1 и φ_2. Кривые, которые описываются этими уравнениями, имеют одну точку пересечения, и значения φ_1 и φ_2, ей соответствующие, находятся численным методом. Зная φ_1 и φ_2, затем находим все величины ψ_m и δ_3, δ_4. Если полученные значения δ_3 и δ_4 недостаточно малы, то мы меняем значения φ_3^0 и φ_4^0 на полученные φ_3 и φ_4 и повторяем процедуру. Итерационная процедура сходится, т. е. каждая следующая итерация дает на порядки меньшие значения δ_3 и δ_4. Таким способом исходную систему можно решить с любой степенью точности всего за несколько шагов.

Джозефсоновская энергия E_J единицы длины вихря для конфигурации В описывается выражением

$$E_J = IE_0\sum_k\left(1-\cos\gamma_k\right), \qquad (13)$$

причем суммирование по k ведется по всем джозефсоновским контактам (см. рис. 8).

Выражение для магнитной энергии E_H единицы длины вихря в случае конфигурации В можно получить тем же способом, что и для конфигурации А:

$$E_H = 0{,}5\sum_m \Phi_m I_m = 0{,}5I^2E_0(2(\psi_0^2 - b\psi_0(2\psi_1 + \\ + \psi_{10} - 3\psi_0) + \psi_{10}^2 - b\psi_{10}(\psi_0 + 2\psi_4 + \psi_{11} - \qquad (14) \\ - 4\psi_{10}) + \ldots) + 4(\psi_1^2 - b\psi_1(\psi_0 + \psi_2 + \psi_4 - 3\psi_1) + \\ + \psi_2^2 - b\psi_2(\psi_1 + \psi_3 + \psi_5 - 3\psi_2) + \ldots)).$$

Расчет, проведенный для различных значений параметра b, показал, что для $I > 0{,}25$ значения φ_3 и φ_4 малы при любых значениях b. Тогда при $I > 0{,}25$ расчет вихря можно проводить, считая, что все $\sin\varphi_k \approx \varphi_k$ при $k \neq 1$ и 2.

На рис. 9 представлены зависимости скачков фаз $\varphi_1 \div \varphi_4$ для разных значений b. Все основные выводы по влиянию параметра b на ход зависимостей скачков фазы от I, сделанные для конфигурации А, остаются справедливыми и здесь.

На рис. 10 представлены зависимости от I величин джозефсоновской и магнитной энергий E_J и E_H при разных b. По сравнению с конфигурацией В джозефсоновская энергия уже не имеет максимума в рассматриваемом диапазоне значений параметра I и монотонно возрастает с увеличением I. Следует отметить, что указанная энергия конфигурации В больше, чем энергия конфигурации А при всех значениях параметра b. Магнитная энергия, наоборот, уменьшилась по сравнению с ранее рассмотренным случаем.

На рис. 5 представлены зависимости приведенной полной энергии от параметра I для конфигурации В при различных значениях b. Из графиков видно, что так же, как и в случае конфигурации А, с ростом параметра b полная энергия вихря всегда уменьшается. При малых значениях I кривые для различных b совпадают, т. е. и для конфигурации В справедлив расчет, проведенный в работе [8], в котором b считается равным нулю.

Расчет зависимостей (см. рис.5) проводился для прямоугольника размером 8×7 (19 уравнений): по три с половиной ряда ячеек от центра вихря по горизонтали влево и вправо и четыре по вертикали вверх. Результаты расчетов показали, что для исследования конфигурации В достаточно рассмотреть прямоугольник размером 6×5. На рис. 11 приведены кривые от-

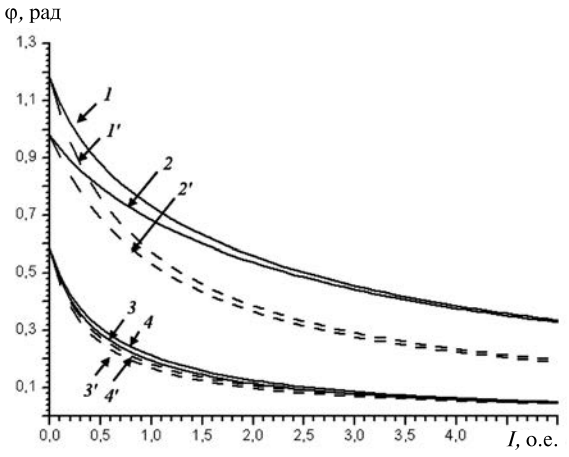


Рис. 9. Расчетные зависимости скачков фаз φ_1 (*1*, *1′*), φ_2 (*2*, *2′*), φ_3 (*3*, *3′*) и φ_4 (*4*, *4′*) от параметра I для значений параметра $b_{\min} = 0{,}049$ (*1–4*) и $b_{\max} = 0{,}454$ (*1′–4′*); прямоугольная область ячейки 8×7 (конфигурация В)

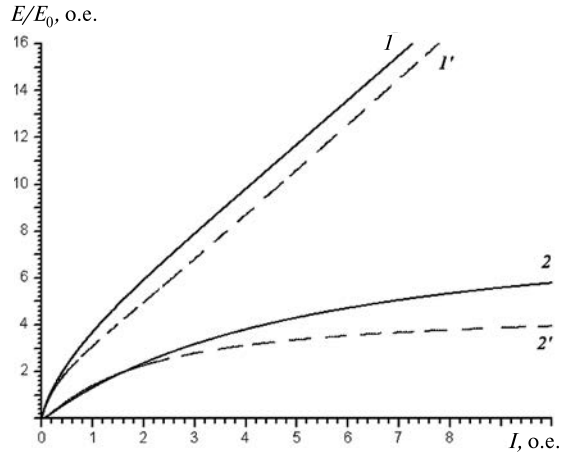


Рис. 10. Графики зависимостей джозефсоновских (*1, 1′*) и магнитных (*2, 2′*) энергий от параметра I для значений параметра $b_{\min} = 0{,}049$ (*1*, *2*) и $b_{\max} = 0{,}454$ (*1′*, *2′*); прямоугольная область ячейки 8×7 (конфигурация В)

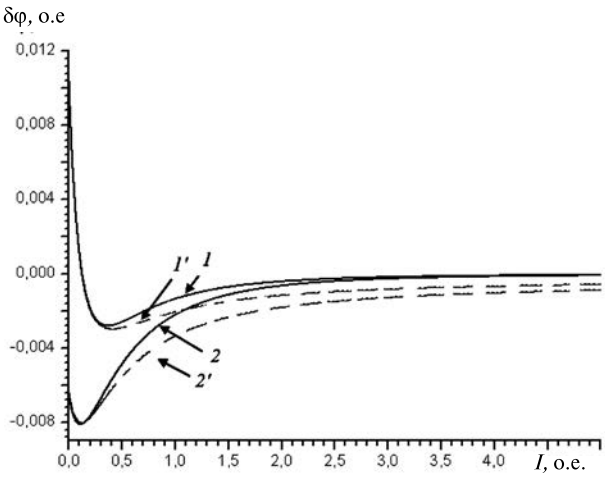


Рис. 11. Расчетные зависимости относительных отклонений $\delta\varphi$ для значений скачков фаз φ_1 (*1*, *1′*), φ_2 (*2*, *2′*) от параметра I при увеличении размера прямоугольника от 6×5 до 8×7 (*1*, *2*); $b_{\min} = 0{,}049$ (*1*, *2*) и $b_{\max} = 0{,}454$ (*1′*, *2′*)

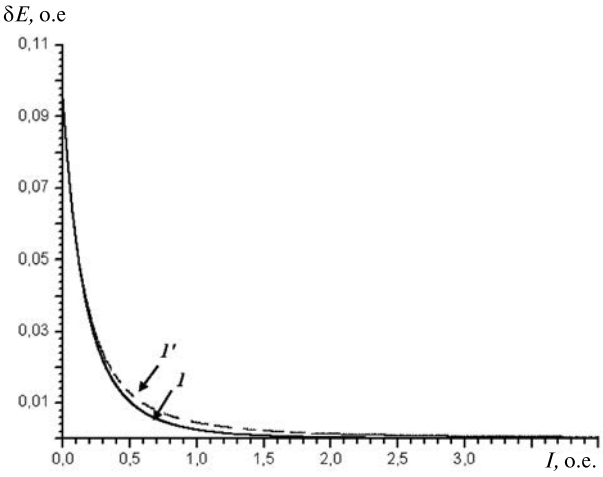


Рис. 12. Графики зависимостей относительных отклонений δE значений полной энергии E от параметра пиннинга I для значений параметра $b_{\min} = 0{,}049$ (*1*) и $b_{\max} = 0{,}454$ (*1′*) при увеличении размера прямоугольника от 6×5 до 8×7

носительных изменений $\delta\varphi$ значений скачков фаз φ_1 и φ_2 при увеличении размера прямоугольника с 6×5 до 8×7. Здесь

$$\delta\varphi_1 = 1 - \varphi_1^{(6\times5)} / \varphi_1^{(8\times7)};\ \delta\varphi_2 = 1 - \varphi_2^{(6\times5)} / \varphi_2^{(8\times7)}.$$

Из приведенных зависимостей следует, что уже прямоугольник 6×5 позволяет получать достаточно точные значения как φ_1 ($\delta\varphi_1$ не более 0,3 %), так и φ_2 ($\delta\varphi_2$ не более 0,8 %). При всех значениях b погрешности малы. Это позволяет сделать вывод, что при значениях $I > 0{,}25$ для расчета структуры центральной части вихря можно ограничиться прямоугольником 6×5.

Подобная оценка для значений полной энергии вихря приведена на рис. 12, где δE – относительное отклонение значения полной энергии E при переходе к прямоугольнику другого размера, причем

$$\delta E = 1 - E^{(6\times5)} / E^{(8\times7)}.$$

При $I = 0{,}25$ переход от прямоугольника 6×5 к 8×7 привел к изменению значения полной энергии на 2,2 %. При больших I ($I > 0{,}25$) разница в значении энергии еще меньше. Так же, как и в случае значений скачков фаз, для расчета полной энергии оказывается достаточным рассмотреть прямоугольник 6×5.

Наш подход для расчета магнитной и джозефсоновской компонент энергии вихря по формулам (13) и (14) верен при таких значениях параметра пиннинга I, при которых вихрь умещается в рассматриваемом прямоугольнике (для выбранного прямоугольника 8×7 при $I > 0{,}25$). В работе [8], где рассматривался линейный вихрь при $Ib << 1$, показано, что расчет по формулам (13) и (14) справедлив при тех же значениях параметра пиннинга.

Сравнивая результаты расчетов для конфигураций А и В (см. рис. 5), можно сделать вывод, что конфигурация В обладает большей энергией, чем А, во всем диапазоне значений параметра b и при $I > 0{,}25$. С ростом b различие в энергиях конфигураций А и В растет.

Таким образом, проведенное исследование показало, что математический подход, основанный на условиях квантования флюксоида в ячейках, позволяет рассчитать структуру и энергию линейных вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде при любых значениях структурного фактора. Рассмотрены две возможные равновесные конфигурации, различающиеся положением центра вихря, в центре одной из ячеек и на одном из контактов.

Составлены бесконечные системы уравнений, описывающие эти конфигурации. Переход к конечной системе выполнен путем пренебрежения токами, протекающими достаточно далеко от центра. Размер квадрата, необходимого для такого расчета, определяется условием малости изменений скачков фазы на ячейках, близких к центру вихря, при увеличении размеров квадрата.

Показано, что при величинах параметра пиннинга I меньше 0,25 справедливо рассмотрение, предполагающее нулевое значение параметра b.

Рассчитаны структуры и энергии обеих конфигураций линейных уединенных вихрей при $I > 0{,}25$ во всем диапазоне возможных значений структурного фактора b.

В отличие от плоских вихрей, ширина которых с убыванием параметра пиннинга I стремится к бесконечности, линейный вихрь при любых значениях I и b имеет центральную часть размером в несколько ячеек, где скачки фазы, а значит и токи в контактах, намного больше, чем в остальной области вихря.

В обеих конфигурациях с увеличением структурного фактора b при одном и том же значении параметра пиннинга I скачки фаз на контактах и токи в центральной области вихря, а также полные энергии вихрей уменьшаются.

Энергия вихря с центром на контакте при всех значениях I и b больше энергии конфигурации с центром в середине ячейки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Muller, K.-H.** Josephson vortices and flux penetration in HTSP [Text] / K.-H. Muller, J.C. Macfarlane, R. Driver // Physica. C. – 1989. – Vol. 158. – P. 69–75.

2. **Rzchowski, M.S.** Vortex pinning in Josephson-junction arrays [Text] / M.S. Rzchowski, S.P. Benz, M. Tinkham, C.J. Lobb // Phys. Rev. B. – 1990. – Vol. 42. – P. 2041–2051.

3. **Kivshar, Yu.S.** Dynamics of solitons in nearly integrable systems [Text] / Yu.S. Kivshar, B.A. Malomed //Rev. Mod. Phys. – 1989. – Vol. 61. – P. 763–915.

4. **Брыксин, В.В.** Критическое состояние неоднородного джозефсоновского контакта [Текст] / В.В. Брыксин, С.Н. Дороговцев // ЖЭТФ. – 1992. – Т. 102. – С. 1025–1032.

5. **Parodi, F.** The critical state and the flux dynamics in squid arrays [Text] / F. Parodi, R. Vaccarone // Physica. C. – 1991. – Vol. 173. – P. 56–64.

6. **Зеликман, М.А.** Влияние структурного фактора на мейсснеровское состояние в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2011. – Т. 116. – № 1. – С. 18–25.

7. **Zelikman, M.A.** Vortex states and screening currents in a 3D Josephson medium with small loop inductance [Text] / M.A. Zelikman // Superconductor Science & Technology. – 1997. – Vol. 10. – № 11. – P. 795–800.

8. **Зеликман, М.А.** // Линейные вихри в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде [Текст] / М.А. Зе-

ликман // ЖТФ. – 2005. – Т. 75. – Вып. 1. – С. 37–44.

9. **Зеликман, М.А.** // Равновесные состояния плоских вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде и смысл понятия «энергия пиннинга» [Текст] / М.А. Зеликман // ЖТФ. – 2004. – Т. 74. – Вып. 9. – С. 55–62.

10. **Де Жен, П.** Сверхпроводимость металлов и сплавов [Текст]: П. де Жен. – М.: Мир, 1968. – 279 с.

УДК 532.517.4

М.С. Грицкевич, А.В. Гарбарук

ВСТРОЕННЫЙ МЕТОД КРУПНЫХ ВИХРЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБЪЕМНОГО ИСТОЧНИКА ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

В последние годы при расчете сложных турбулентных течений все более широкое применение находят так называемые гибридные (RANS/LES)-подходы к моделированию турбулентности [1], которые сочетают в себе сильные стороны традиционных методов, базирующихся на уравнениях Рейнольдса (RANS – Reynolds-Averaged Navier – Stokes), и метода моделирования крупных вихрей (LES – Large Eddy Simulation). Встроенный LES (ELES – Embedded LES) представляет собой пример достаточно широкой группы гибридных моделей, в которых LES используется только в ограниченных априорно-задаваемых областях потока (например там, где RANS не обеспечивает приемлемой точности расчета осредненных параметров течения или требуется определить нестационарные характеристики турбулентности), а в остальной части потока применяется RANS. Однако для успешного функционирования ELES в тех случаях, когда LES-подобласть расположена вниз по потоку от RANS-подобласти, на входе в нее необходимо каким-либо образом искусственно создать турбулентный «контент», так как в противном случае для формирования реалистичных полей разрешенных турбулентных пульсаций требуется неприемлемо длинный переходный участок.

Большинство предложенных в настоящее время способов решения этой задачи основывается на задании на входных границах LES-подобласти тех или иных нестационарных граничных условий («синтетической турбулентности»), что накладывает достаточно жесткие ограничения на выбор положения этой границы и тем самым значительно сужает область применимости ELES при расчете течений со сложной геометрией. Кроме того, при использовании данного подхода могут возникать разрывы гидродинамических переменных на границе RANS- и LES-подобластей, для устранения которых требуется применение специальных приемов [2], трудно реализуемых в CFD-кодах общего назначения.

Перспективной альтернативой созданию турбулентного контента с использованием нестационарных граничных условий в LES-подобласти ELES является введение в уравнение движения объемного источника турбулентных пульсаций (ОИТП) [3], сконструированного специальным образом. Однако реализация этой идеи в работе [3], опирающаяся на метод вихрей (VM – Vortex Method) [4] обладает рядом недостатков. В частности, метод вихрей плохо распараллеливается, что делает его малоэффективным при решении требующих больших вычислительных ресурсов сложных задач, для которых в первую очередь предназначен ELES. Кроме того, несмотря на то, что опыт практического использования VM пока невелик, он сви-

детельствует о том, что этот метод требует сравнительно длинной области вниз по течению от RANS-LES-интерфейса для установления реалистичного поля турбулентных пульсаций.

В настоящей работе предложен другой, более простой и эффективный метод ОИТП и проведено его тестирование на примере решения нескольких конкретных задач.

Описание метода

Предлагаемый в настоящей работе метод является двухэтапным. На первом этапе производится RANS-расчет рассматриваемого течения, а на втором – ELES-расчет. При этом на втором этапе в уравнение переноса импульса в узком слое LES-подобласти вблизи границы с RANS-подобластью вводится объемный источник, определяемый выражением

$$\mathbf{S}_u = \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{u}' \langle \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \mathbf{u}' \right), \qquad (1)$$

где $\mathbf{u}'$ – вектор турбулентных пульсаций скорости; $\langle \mathbf{u} \rangle$ – вектор осредненной скорости, полученный на RANS-этапе решения.

Дискретный аналог выражения (1) в проекции на ось x_i имеет вид

$$\left(S_{u_i}\right)_c = \left(\frac{u_i'^{N} - u_i'^{N-1}}{\Delta t} \right)_c + \frac{1}{V} \sum_f \left(A_j u_j'^{N-1} \langle u \rangle_i + A_j \langle u \rangle_j u_i'^{N-1} + A_j u_j'^{N-1} u_i'^{N-1} \right)_f, \qquad (2)$$

где V – объем рассматриваемой ячейки сетки; Δt – шаг интегрирования по времени; $\mathbf{A}_f$ – вектор площади грани ячейки, нижние индексы i, j относится к проекциям векторных величин на оси координат; нижние индексы c, f означают значения соответствующих величин в центрах и на гранях ячейки, а верхние индексы N, N–1 – значения на текущем и предыдущем (известном) временных слоях соответственно.

Входящий в выражение (2) вектор турбулентных пульсаций $\mathbf{u}'$ определяется при помощи генератора синтетической турбулентности (ГСТ), недавно предложенного в работах [5, 6]. Входными параметрами этого генератора служат компоненты тензора рейнольдсовых напряжений или (в случае использования на RANS-этапе линейных моделей турбулентности) величины кинетической энергии k_t и интегрального линейного масштаба турбулентности l_t (предполагается, что линейная RANS-модель есть дифференциальная модель с двумя уравнениями).

Отметим, что на втором этапе расчета в LES-подобласти могут использоваться как алгебраические, так и дифференциальные подсеточные модели. В последнем случае, во избежание «двойного учета» кинетической энергии турбулентности при переходе из RANS- в LES-подобласть [7], наряду с внесением источника (1) в уравнение переноса импульса необходимо внести сток в уравнение переноса подсеточной кинетической энергии турбулентности. Выражение для этого стока имеет вид

$$\left(S_{k\,SGS}\right)_c = \frac{1}{V} \sum_f (A_j \langle u \rangle_j k_S)_f, \qquad (3)$$

где $k_S = \max\{0,\ k_t - \omega_t (C_{\mathrm{Smag}} \Delta)^2 S\}$ ($\Delta = \min\{C_w \max[d_w, h_{\max}], h_{\max}\}$ [8]; k_t, ω_t – кинетическая энергия турбулентности и удельная скорость ее диссипации, определенные на первом (RANS-) этапе расчета; S – модуль тензора скоростей деформаций; d_w – ближайшее расстояние от рассматриваемой точки до обтекаемой твердой поверхности; $h_{\max}$ – максимальный размер ячейки в направлениях параллельных поверхности; $C_{\mathrm{Smag}} = 0{,}2$ – константа Смагоринского; C_w – эмпирическая константа, равная 0,15 [8]).

Описанный способ введения ОИТП в LES-подобласти (соотношения (1) – (3)) был реализован с помощью пользовательского интерфейса в CFD- коде общего назначения ANSYS Fluent [9]. При этом для проведения расчетов конкретных течений, рассмотренных в следующем разделе статьи, решение уравнений RANS и LES осуществлялось с использованием следующих моделей турбулентности и численных методов.

На первом (RANS-) этапе расчета решались стационарные уравнения Рейнольдса, замкнутые с помощью k-ω-модели переноса сдвиговых напряжений (модель SST – Shear Stress Transport) [10]. Конвективные члены уравнений аппроксимировались с помощью противопоточной схемы второго порядка [9], а градиент давления – с использованием гибридной схемы первого/второго порядка [11]. Гради-

енты скорости и турбулентных характеристик аппроксимировались с применением теоремы Гаусса – Грина, записанной относительно центров граней со вторым порядком точности [9]. Для подавления четно-нечетных осцилляций давления использовалась поправка Рай-Чоу для конвективных потоков [11]. Полученные в результате аппроксимаций дискретные уравнения решались совместно [9] с помощью поточечной релаксации Гаусса – Зейделя, при этом для ускорения сходимости итераций использовался алгебраический многосеточный метод [9].

На втором (ELES-) этапе расчета в RANS-подобласти решались нестационарные уравнения Рейнольдса с той же, что и на первом этапе, моделью турбулентности, а в LES-подобласти применялось три различные модели, а именно классическая подсеточная модель Смагоринского [12], алгебраическая гибридная модель и метод IDDES, предложенные в работе [8]. При этом во всех случаях конвективные члены в LES-подобласти аппроксимировались с использованием центрально-разностной схемы второго порядка [9], а градиенты давления, скорости и турбулентных характеристик – так же, как и на RANS-этапе. Интегрирование по времени осуществлялось при помощи трехслойной схемы Эйлера второго порядка точности в сочетании с методом безытерационного продвижения по времени [9, 13, 14], а решение полученных в результате дискретизации систем уравнений осуществлялось теми же методами, что и на RANS-этапе.

Результаты расчетов

Для проверки корректности и оценки эффективности представленного в настоящей работе способа создания начального турбулентного контента в LES-подобласти ELES, с его использованием были выполнены расчеты четырех течений. Первые три из них (вырождение однородной изотропной турбулентности вниз по потоку от ее источника, установившееся течение в плоском канале и обтекание плоской пластины) являются «каноническими» тестами для любых моделей турбулентности, а последнее – течение в плоском канале с выпуклостью на нижней стенке, – представляет собой пример сложных течений с отрывом и присоединением, достаточно точное предсказание которых с помощью RANS невозможно.

Вырождение однородной изотропной турбулентности. Данное течение рассматривалось в классических экспериментах [15, 16], посвященных изучению процесса затухания турбулентности, создаваемой сеткой, установленной в некотором сечении экспериментальной секции аэродинамической трубы.

Расчетная область представляла собой параллелепипед с размерами $4D \times 2D \times 2D$ (D – размер ячеек сетки, генерирующей турбулентность) в направлении течения и в двух нормальных к нему направлениях соответственно. На ELES-этапе расчета она разбивалась на RANS- ($0 < x/D < 1$) и LES- ($1 \le x/D < 4$) подобласти.

В расчетах использовалась равномерная декартова сетка размером $65 \times 33 \times 33$, а шаг интегрирования по времени на ELES-этапе составлял $\Delta t = 0{,}05D/U_k$ (U_k равно квадратному корню из начальной кинетической энергии турбулентности), что обеспечивает выполнение условия CFL < 1 (CFL – число Куранта) во всей расчетной области.

На входной границе расчетной области задавались однородные профили скорости $u_0 = U_k$, кинетической энергии турбулентности $k_0 = U_k^2$ и удельной скорости ее диссипации $\omega_0 = 15U_k/D$. На выходной границе задавалось постоянное давление, а все остальные переменные линейно экстраполировались на границу из внутренних точек области. Наконец, на боковых границах использовались условия периодичности.

Для создания турбулентного контента в LES-подобласти использовался описанный в предыдущем разделе метод ОИТП. При этом область ненулевого источника располагалась на участке $1 < x/D < 1{,}0625$ (ее протяженность составляла одну ячейку сетки).

Следует отметить, что выбранное значение скорости за решеткой существенно меньше, чем значение, имевшее место в экспериментах [15, 16]. По этой причине оценка точности предлагаемого метода проводилась на основе сопоставления результатов расчетов не с экспериментальными данными, а с результатами RANS-расчета с помощью SST-модели [10], которая обеспечивает достаточно точное предсказание скорости затухания изотропной турбулентности, наблюдавшееся в экспериментах [17].

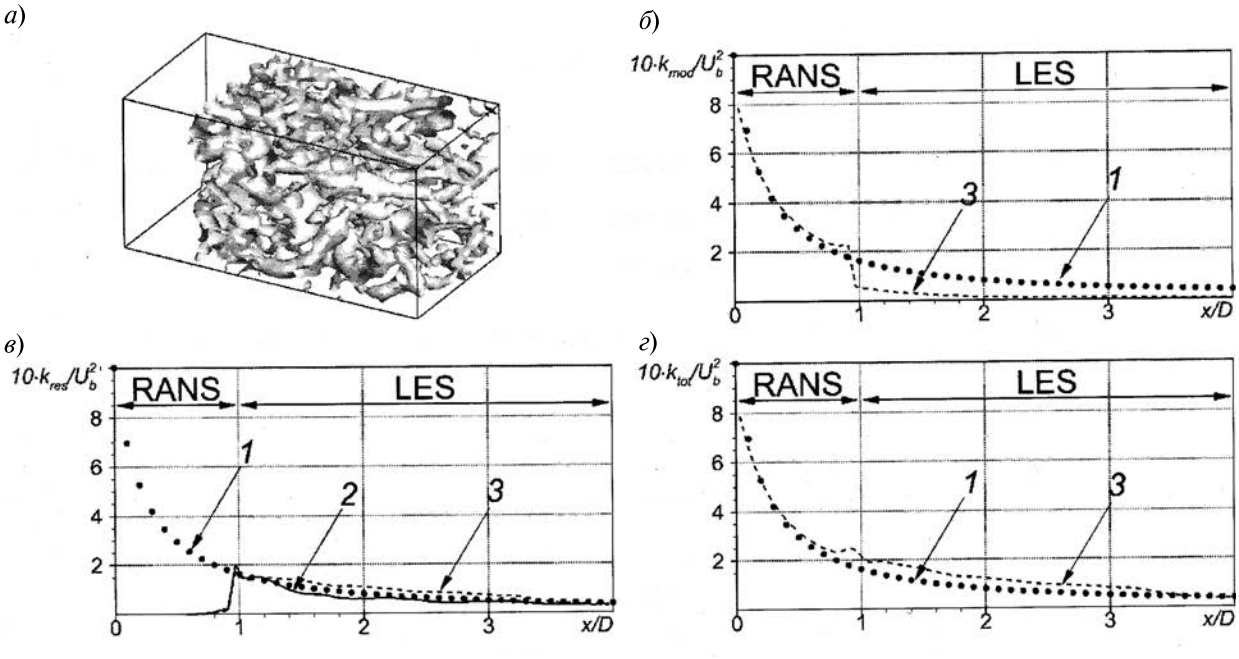


Рис. 1. Результаты расчетов процесса вырождения однородной изотропной турбулентности: мгновенная изоповерхность Q-критерия, окрашенная по величине модуля скорости (*а*), и продольные распределения модельной (*б*), разрешенной (*в*), и полной (*г*) кинетических энергий турбулентности; *1* – RANS-SST, *2* – ОИТП с моделью Смагоринского, *3* – ОИТП с IDDES-моделью

Решение RANS для описанной задачи является тривиальным ($u = U_k$, $v = 0$, $w = 0$, $p = \text{const}$). Поэтому первый этап расчета сводится в данном случае к интегрированию уравнений переноса k и ω SST-модели при известном поле скорости.

На втором этапе в LES-подобласти использовалась модель Смагоринского и метод IDDES (последний в данной задаче сводится к подсеточному аналогу RANS-модели SST [18]).

Статистическая обработка результатов LES проводилась для временного интервала, равного 1000 временных шагов, что соответствует приблизительно 12,5 конвективным единицам времени $4D/u_0$. Кроме того, производилось осреднение решения по однородным координатам (y и z).

Некоторые результаты расчета описанного течения представлены на рис. 1. Они свидетельствуют о том, что независимо от используемой в LES-подобласти подсеточной модели предлагаемый метод ОИТП обеспечивает быстрое формирование в ней качественно правильных турбулентных структур (рис. 1, *а*). В результате в LES-подобласти происходит практически мгновенный перевод кинетической энергии турбулентности, которая в RANS-подобласти полностью моделируется (см. рис. 1, *б*, $0 < x/D < 1$), в моделируемую (подсеточную) и разрешенную энергию (см. рис. 1, *б*, *в*; $1 < x/D < 4$). При этом полная энергия на протяжении всей расчетной области хорошо согласуется со значениями, полученными в эталонном RANS-расчете (рис. 1, *г*).

Развитое течение в канале. Данное течение было рассчитано при двух значениях числа Рейнольдса Re_τ, построенного по динамической скорости

$$u_\tau = (\tau_w/\rho)^{0,5}$$

(τ_w – напряжение трения на стенке, ρ – плотность) и по высоте канала H: $\text{Re}_\tau = 395$ и 18000.

Полная длина расчетной области составляла $4H$, а ширина – $1{,}5H$. При этом RANS-подобласть располагалась при $0 < x/H < 1{,}0$, а LES-подобласть – в остальной части расчетной области.

Для обоих чисел Рейнольса использовалась одна и та же равномерная расчетная сетка по координатам x, z с шагами, равными $0{,}050H$ и $0{,}025H$ соответственно. В координатах закона стенки это соответствует значениям $\Delta x^+ = 40$ и $\Delta z^+ = 20$ для $\text{Re}_\tau = 395$ и $\Delta x^+ = 1800$ и $\Delta z^+ = 900$

для $\mathrm{Re}_\tau = 18000$. В направлении нормали к стенкам канала сетка была неравномерной. Ее шаг изменялся по геометрической прогрессии с показателем 1,15 от минимального пристеночного значения, которое выбиралось так, чтобы обеспечить выполнение неравенства $\Delta y^+_w < 1$, до максимального значения, равного $\Delta y = 0{,}0375H$ ($\Delta y^+ = 30$ и 1350 для $\mathrm{Re}_\tau = 395$ и 18000 соответственно). Безразмерный шаг интегрирования по времени на ELES-этапе расчета составлял $\Delta t = 0{,}02H/U_b$ (U_b – среднемассовая скорость потока), что обеспечивало значение числа Куранта меньше единицы во всей расчетной области.

Граничные условия для рассматриваемого течения ставились следующим образом.

На стенках канала использовались условия прилипания и непроницаемости для скорости, модельная/подсеточная кинетическая энергия и вязкость полагались равными нулю, а удельная скорость диссипации турбулентности ω_t определялась по формуле [10]:

$$\omega_t = 10\frac{6\nu}{\beta_1 \Delta y_w{}^2}, \qquad (4)$$

где ν – молекулярная кинематическая вязкость; $\beta_1 = 0{,}075$; Δy_w – первый пристеночный шаг сетки.

На входной границе задавались профили скорости и турбулентных характеристик, полученные из предварительного RANS-расчета SST с использованием периодических граничных условий по координатам x, z.

На выходной границе задавалась величина давления (в рамках приближения несжимаемой жидкости ее конкретное значение не играет роли), а все остальные переменные линейно экстраполировались изнутри расчетной области. Наконец, на границах области по координате z использовались условия периодичности.

На втором (ELES-) этапе расчета в LES-подобласти использовался метод IDDES и гибридная алгебраическая модель [8]. В последнем случае для создания турбулентного контента, наряду с методом ОИТП (как и в предыдущем случае, область ненулевого источника имела протяженность в одну ячейку и располагалась при $1{,}0 \le x/H < 1{,}05$), использовался метод задания нестационарных граничных условий на границе RANS- и LES-подобластей [5].

При статистической обработке результатов LES проводилось осреднение мгновенных характеристик потока по временному интервалу, равному 5000 временных шагов, что соответствует приблизительно 25 конвективным временным единицам $4H/U_b$. Кроме того, производилось осреднение решения по однородной координате z.

Результаты расчетов представлены на рис. 2 в форме изоповерхности Q-критерия, окрашенной по величине модуля скорости (рис. 2,*а*), и продольных распределений коэффициента трения вдоль стенок канала, рассчитанных с использованием в LES-подобласти алгебраической гибридной модели и метода IDDES (рис. 2,*б*, *в*). Там же показаны аналогичные распределения, рассчитанные с использованием SST RANS, которые использовались в качестве «эталона».

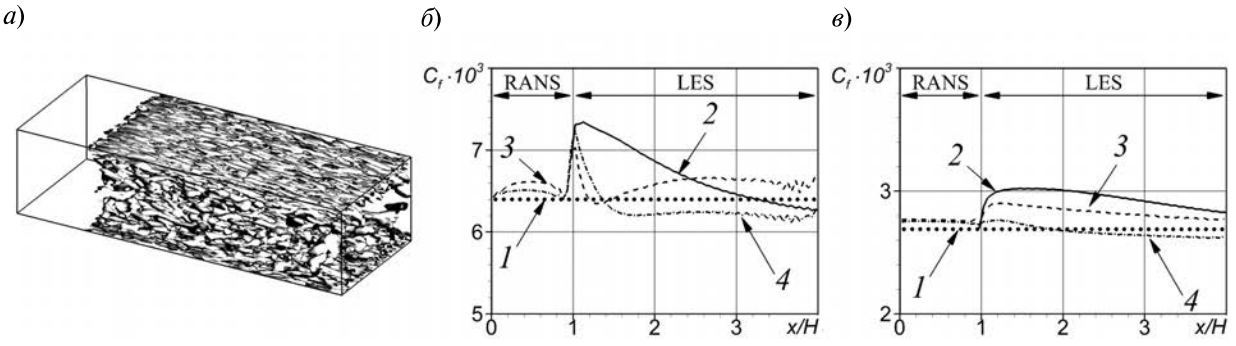


Рис. 2. Результаты расчетов установившегося течения в канале: мгновенная изоповерхность Q-критерия, окрашенная по величине модуля скорости (*а*), и распределения коэффициента трения для $\mathrm{Re}_\tau = 395$ (*б*) и $\mathrm{Re}_\tau = 18000$ (*в*)

1 – RANS-SST, *2* – ГСТ с WMLES-моделью, *3* – ОИТП с WMLES-моделью, *4* – ОИТП с IDDES-моделью

Анализ представленных результатов позволяет заключить, что, как и в рассмотренном выше случае затухания изотропной турбулентности, вниз по потоку от RANS-области в канале быстро формируются реалистичные (характеризующиеся существенной анизотропией в пристеночной части потока) турбулентные структуры. Что касается коэффициента трения, то точность его расчета заметно зависит от конкретной модели турбулентности, используемой в LES-подобласти (см. рис. 2 *б*, *в*); наилучшие результаты были получены с помощью метода IDDES. Тем не менее, во всех случаях результаты, полученные при создании турбулентного контента в LES-подобласти с помощью ОИТП, существенно превосходят таковые, которые получены при постановке на границе RANS- и LES-подобластей нестационарных граничных условий, основанных на том же генераторе синтетической турбулентности, что и ОИТП [5].

Течение в пограничном слое на плоской пластине. Это течение, как и развитое течение в плоском канале (см. предыдущий раздел), является общепринятым тестом любых моделей турбулентности, предназначенных для расчета пристеночных турбулентных потоков. В настоящей работе его расчеты выполнены для двух значений числа Рейнольдса, построенных по толщине θ потери импульса и скорости во внешнем потоке: $\mathrm{Re}_\theta = 1000$ и 10000.

Расчетная область имела форму прямоугольного параллелепипеда с размерами

$$31{,}250\delta_0 \times 12{,}500\delta_0 \times 3{,}875\delta_0,$$

где δ_0 – толщина пограничного слоя во входном сечении расчетной области (при $x = 0$). RANS-подобласть располагалась на участке $0 < x/\delta_0 < 3{,}125$, а LES-подобласть – на участке $3{,}125 \le x/\delta_0 < 31{,}25$.

Размер расчетной сетки составлял $251 \times 71 \times 63$ узла для значения $\mathrm{Re}_\theta = 1000$ и $251 \times 87 \times 63$ узла для $\mathrm{Re}_\theta = 10000$. Шаги сетки в направлениях x и z были постоянными и составляли $0{,}1250\delta_0$ и $0{,}0625\delta_0$ соответственно, что отвечает значениям $\Delta x^+ = 60$ и $\Delta z^+ = 30$ для $\mathrm{Re}_\theta = 1000$; $\Delta x^+ = 450$ и $\Delta z^+ = 225$ для $\mathrm{Re}_\theta = 10000$. Сетка по направлению нормали к пластине была неравномерной с минимальным значением шага у поверхности пластины и плавным (по геометрической прогрессии с показателем 1,15) увеличением по мере удаления от поверхности. Пристеночные шаги составляли $\Delta y_w/\delta_0 = 3{,}125 \cdot 10^{-3}$ при $\mathrm{Re}_\theta = 1000$ и $\Delta y_w/\delta_0 = 3{,}125 \cdot 10^{-4}$ при $\mathrm{Re}_\theta = 10000$, что в обоих случаях обеспечивает выполнение условия $\Delta y^+_w < 1$. Шаг интегрирования по времени, как и в двух предыдущих случаях, выбирался так, чтобы удовлетворить условие CFL < 1 во всей расчетной области. Его значение составляло $\Delta t = 0{,}03\delta_0/U_0$.

На стенках канала использовались те же условия, что и при расчете установившегося течения в плоском канале (см. предыдущий раздел). На входе в расчетную область задавались профили скорости и турбулентных характеристик, полученные из предварительного RANS-расчета SST в сечении пластины, где толщина пограничного слоя равна величине δ_0. На выходе задавалось значение давления, а остальные гидродинамические переменные линейно экстраполировались изнутри расчетной области. Наконец, на верхней границе области использовались условия свободного скольжения (симметрии), а на границах области по координате z – условия периодичности.

На ELES-этапе расчета в LES-подобласти использовалась гибридная алгебраическая модель [8] в сочетании с двумя способами создания турбулентного контента: с помощью ОИТП и путем задания на границе между RANS- и LES-подобластями внутренних нестационарных граничных условий. Как и в двух предыдущих случаях, область ненулевого ОИТП имела протяженность в одну ячейку и располагалась при значениях $3{,}125 < x/\delta_0 < 3{,}250$.

При статистической обработке результатов LES осреднение проводилось по интервалу времени, равному 5000 временных шагов, что соответствует приблизительно 100 конвективным единицам времени $31{,}250\delta_0/U_0$ и по однородной координате z.

Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 3. В частности, на рис. 3, *а* показана изоповерхность Q-критерия, которая свидетельствует о том, что в случае создании турбулентного контента в LES-подобласти с помощью ОИТП в ней быстро формируются реалистичные разрешенные турбулентные структуры. В результате расчетные распределения коэффициента трения (рис. 3, *б*, *в*) оказываются близкими к соответствующим распределени-

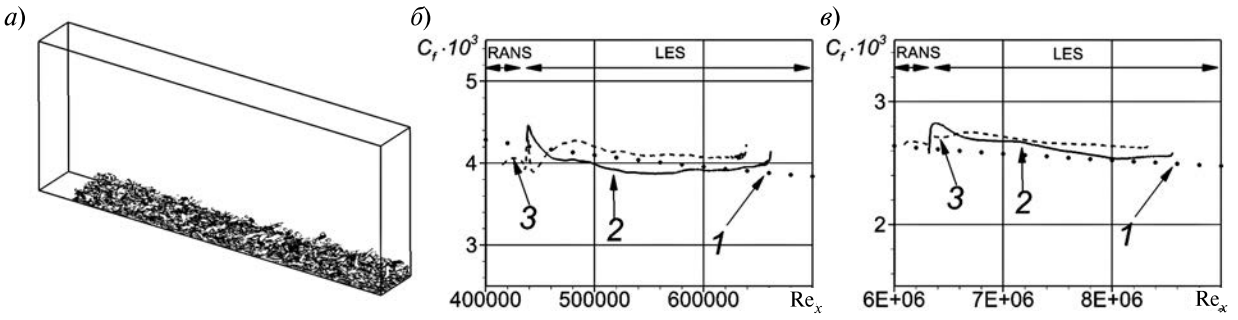


Рис. 3. Результаты расчетов течения в пограничном слое с нулевым градиентом давления: мгновенная изоповерхность Q-критерия, окрашенная по величине модуля скорости (*а*), и распределения коэффициента трения для $Re_\theta = 1000$ (*б*) и $Re_\theta = 10000$ (*в*);
1 – корреляция, *2* – ГСТ с WMLES-моделью, *3* – ОИТП с WMLES-моделью

ям, рассчитанным по эмпирическим формулам [19, 20], и к результатам расчета с заданием турбулентного контента с использованием ГСТ [5].

Течение в плоском канале с выпуклостью на нижней стенке. Данное течение, исследовавшееся в эксперименте [21] (см. схему на рис. 4, *а*), характеризуется наличием отрыва потока от выпуклости протяженностью C и последующим его присоединением к нижней стенке канала. В отличие от трех рассмотренных выше течений, его расчет с использованием RANS-моделей турбулентности не позволяет с приемлемой для практики точностью определить даже такие важные характеристики, как распределение давления и трения вдоль нижней стенки канала и длину зоны рециркуляции (положение точки присоединения). В связи с этим оно является представительным тестом для оценки вихреразрешающих моделей турбулентности, позволяющим объективно оценить их преимущества над RANS-моделями (см например [5, 22, 23]).

Расчетная область, использовавшаяся в настоящей работе (рис. 4, *а*), имела форму параллелепипеда размером $6{,}140C \times 0{,}909C \times 0{,}200C$ (отметим, что в соответствии с рекомендациями работы [23], для того, чтобы учесть влияние боковых стенок, присутствующих в экспериментальной установке, верхняя стенка канала была специальным образом деформирована). Начало координат совпадает с началом выпуклости. Таким образом, координата x в расчетной области изменялась от $-2{,}14C$ до $4C$.

Размер сетки составлял $379 \times 111 \times 51$ узлов (приблизительно 1,9 млн. ячеек). При этом в отрывной зоне, формирующейся на стенке вниз по потоку от выпуклости, величина шага сетки в направлениях x и z составляла $\Delta x/C = 0{,}005$ и $\Delta z/C = 0{,}004$. В направлении по нормали к стенке использовалась неравномерная сетка с коэффициентом сгущения 1,15, так чтобы обеспечить выполнение неравенства $\Delta y^+_w < 1$. Безразмерный шаг по времени был $\Delta t = 0{,}001 C/U_b$, что соответствовало числу Куранта меньше единицы во всей расчетной области.

Расчетная область разбивалась на RANS- ($-2{,}1400 < x/C < 0{,}4065$) и LES- ($0{,}4065 < x/C < 4$) подобласти, а область ненулевого ОИТП располагалась при $0{,}4065 < x/C < 0{,}4156$ и имела длину в одну ячейку.

Параметры осредненного течения и характеристики турбулентности на входе в расчетную область задавались на основе предварительного RANS-расчета SST пограничного слоя на плоской пластине при числе Рейнольдса, построенном по толщине потери импульса, равном 7200. На нижней стенке канала использовались условия прилипания и непроницаемости, а на верхней – условия свободного скольжения [24]. На выходе из расчетной области задавалось давление, а все остальные переменные линейно экстраполировались из внутренних точек расчетной области. Наконец, как и во всех предыдущих случаях, по координате z использовались условия периодичности.

Как и при проведении расчетов течения в пограничном слое на плоской пластине, представленных в предыдущем разделе, на ELES-этапе расчета в LES-подобласти использовалась

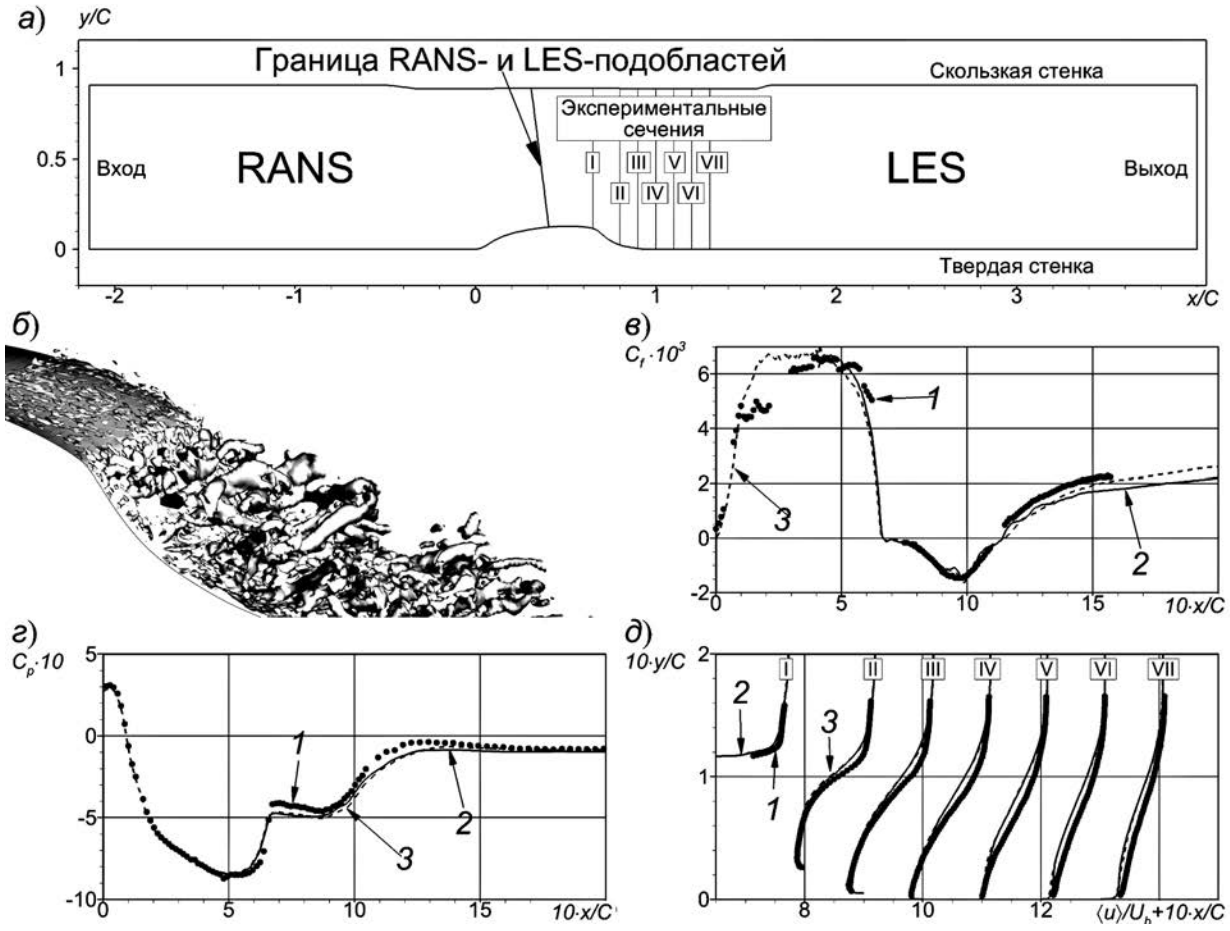


Рис. 4. Результаты расчетов обтекания выпуклости на стенке канала: схематическое изображение расчетной области (*а*), мгновенная изоповерхность *Q*-критерия, окрашенная по величине модуля скорости (*б*), расчетные распределения коэффициента трения (*в*) и коэффициента давления (*г*) вдоль нижней стенки канала, а также профили скорости (*д*) в сечениях x/C = 0,65; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3 (I – VII);
1 – эксперимент, *2* – ГСТ с WMLES-моделью, *3* – ОИТП с WMLES-моделью

гибридная алгебраическая модель [8], а турбулентный контент создавался двумя способами: с помощью ОИТП и путем задания на границе между RANS- и LES-подобластями нестационарных граничных условий [5].

При статистической обработке результатов LES проводилось осреднение решения по временному интервалу, равному 5000 шагам по времени, что соответствует приблизительно 0,8 конвективным единицам времени $6{,}14C/U_b$, и по координате *z*.

На рис. 4, *б* представлена изоповерхность *Q*-критерия, а на рис. 4, *в*–*д* показаны расчетные продольные распределения коэффициентов трения C_f и давления C_p вдоль нижней стенки канала, а также профили продольной составляющей вектора скорости *u* в различных сечениях в сравнении с экспериментальными данными. Из этих рисунков видно, что, как и в случае рассмотренных ранее простых течений, создание турбулентного контента в LES-подобласти ELES с помощью метода ОИТП обеспечивает быстрое формирование разрешенных турбулентных структур вверх по потоку от точки отрыва. Более того, в данном случае это позволяет правильно описать дальнейшую эволюцию турбулентности в оторвавшемся слое смешения и в зоне рециркуляции, а также с высокой точностью предсказать характеристики осредненного течения как в отрывной области, так и в области вниз по потоку от точки присоединения потока к нижней стенке канала.

Отметим также, что результаты расчетов, в которых для создания турбулентного контента используется метод ОИТП, не только не уступают, но даже несколько превосходят по точности аналогичные результаты, полученные с использованием для этой цели метода ГСТ [5].

Таким образом, в работе предложен простой и эффективный метод расчета турбулентных течений в рамках встроенного LES-подхода, основанный на оригинальном способе реализации идеи создания турбулентного контента в LES-подобласти с помощью объемного источника турбулентных пульсаций. Метод реализован в CFD-коде FLUENT и, как показали результаты его тестирования, обеспечивает высокую точность расчета как присоединенных, так и отрывных течений. Кроме того, продемонстрирована эффективность предложенного метода в сочетании с различными подсеточными моделями турбулентности, и показано, что он не только не уступает, но и несколько превосходит по точности менее технологичный метод создания турбулентного контента, основанный на использовании нестационарных граничных условий на RANS-LES-интерфейсе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Spalart, P.R.** Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach [Text] / P.R. Spalart, W.H. Jou, M. Strelets, S.R. Allmaras // Proceedings of first AFOSR international conference on DND/LES. – 1997. – P. 1–11.

2. **Von Terzi, D.A.** Hybrid techniques for large-eddy simulations of complex turbulent flows [Text] / D.A. von Terzi, J. Frohlich, W. Rodi //High Performance Computing in Science and Engineering. – 2008. – P. 195–213.

3. **Mathey, F.** Aerodynamic noise simulation of the flow past an airfoil trailing-edge using a hybrid zonal RANS-LES [Text] /F. Mathey //Computers & Fluids. – 2008. – Vol. 37. – P. 836–843.

4. **Mathey, F.** Assessment of the vortex method for LES inlet conditions [Text]/ F. Mathey, D. Cokljat, J.P. Bertoglio, E. Sergent // Progress in Computational Fluid Dynamics. – 2006. – Vol. 6. – P. 58–67.

5. **Adamian, D.** An efficient generator of synthetic turbulence at RANS-LES interface in embedded LES of wall-bounded and free shear flows [Text] /D. Adamian, A. Travin// ICCFD6. – 2010. – P. 1–6.

6. **Адамьян, Д.Ю.** Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES-области в рамках комбинированных RANS-LES подходов к расчету турбулентных течений [Текст] / Д.Ю. Адамьян, М.Х. Стрелец, А.К. Травин // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23. – № 7. – С. 3–20.

7. **Von Terzi, D.A.** Segregated coupling of large-eddy simulations with downstream Reynolds – averaged Navier – Stokes calculations [Text] /D.A. von Terzi, J. Frohlich // Computers & Fluids. – 2010. – Vol. 39. – № 8. – P. 1314–1331.

8. **Shur, M.L.** A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modeled LES capabilities [Text] /M.L. Shur, P.R. Spalart, M. Kh. Strelets, A.K. Travin // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2008. – Vol. 29. – P. 1638–1649.

9. **ANSYS Inc.** ANSYS FLUENT 13.0 Theory Guide [Text] /ANSYS Inc. // 2009. – P. 1–816.

10. **Menter, F.R.** Ten years of experience with the SST turbulence model [Text] /F.R. Menter, M. Kuntz, R. Langtry // 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer. Antalya Turbulence. Heat and Mass Transfer. – 2003. – P. 625–632.

11. **Rhie, C.M.** Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation [Text] / C.M. Rhie, W.L. Chow //AIAA Journal. – 1983. – Vol. 21. – № 11. – P. 1525–1532.

12. **Smagorinsky, J.** General circulation experiments with the primitive equations [Text] /J. Smagorinsky// Monthly weather review. – 1963. – Vol. 91. – P. 99–165.

13. **Vandoormaal, J.P.** Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows [Text] / J.P. Vandoormaal, G.D. Raithby //Numer. Heat Transfer. – 1984. – Vol. 7. – P. 147–163.

14. **Dukowwicz, J.K.** Approximate factorization as a high-order splitting for the implicit incompressible flow equations [Text] /J.K. Dukowwicz, A.S. Dvinsky // Journal of Computational Physics. – 1992. – Vol. 102. – P. 336–347.

15. **Comte-Bellot, G.** Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated “isotropic” turbulence [Text] / G. Comte-Bellot, S. Corrsin // J. Fluid Mech. – 1971. – Vol. 48. – P. 273–337.

16. **Comte-Bellot, G.** The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence [Text] / G. Comte-Bellot, S. Corrsin // J. Fluid Mech. – 1966. – Vol. 25. – P. 657–682.

17. **Wilcox, D.C.** Turbulence modeling for CFD [Text]/ D.C. Wilcox. – 3rd ed. – New York: DCV Industries, Inc., 2006. – 522 p.

18. **Strelets, M.** Detached eddy simulation of massively separated flows [Text] / M. Strelets // AIAA Paper. – 2001. – Vol. 2001-0879. – P. 1–18.

19. **Schoenherr, K.E.** Resistance of flat surfaces moving through a fluid [Text] /K.E. Schoenherr // Transactions – The Society of Naval Architects and Marine Engineers. – 1932. – Vol. 40. – P. 279–313.

20. **Watson, R.D.** Review of skin friction measurements including recent high Reynolds number results from NASA Langley NTF [Text] / R.D. Watson, R.M. Hall, J.B. Anders // AIAA Paper. – 2000. – Vol. 2000-2392. –P. 1–21.

21. **Greenblatt, D.** A separation control CFD validation test case Part 2. Zero efflux Oscillatory blowing [Text] / D. Greenblatt, K.B. Paschal, Yao Chung-Sheng, J. Harris // AIAA Paper. -2005. – Vol. 2005-0485. – P. 1–24.

22. **Avdis, A.** Large eddy simulation of separated flow over a two-dimensional hump with and without control by means of a synthetic slot-jet [Text] /A. Avdis, S. Lardeau, M. Leschziner// Flow Turbul. Combust. – 2009. – Vol. 83. – P. 343–370.

23. **Rumsey, C.** Summary of the 2004 CFD validation workshop on synthetic jets and turbulent separation control [Text] / C.L. Rumsey, T.B. Gatski, W.L. Sellers,[et al.] // AIAA Paper. – 2004. – Vol. 2004-2217. – P. 1–31.

ПРИБОРЫ И ТЕХНИКА ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

УДК 543.427.4

Е.В. Чижова

РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИИ РЕНТГЕНООПТИЧЕСКОЙ СХЕМЫ РЕНТГЕНОФЛУОРЕСЦЕНТНОГО МИКРОАНАЛИЗАТОРА

Метод рентгенофлуоресцентного микроанализа применяется для исследования микрообъектов, микрообластей, образцов с неоднородным распределением элементов по поверхности. Метод позволяет проводить качественный и количественный элементные анализы, а также – элементное картирование поверхности объектов различной природы [1]. Одним из основных принципов построения схемы рентгенофлуоресцентного микроанализатора является обеспечение оптимальных условий возбуждения и регистрации характеристического излучения анализируемых объектов.

В настоящей работе проведен расчет оптимальной геометрии рентгенооптической схемы микроанализатора на основе моделирования его работы методом Монте-Карло (ММК). Для определения теоретических интенсивностей характеристического излучения в алгоритме ММК моделируется три известных процесса взаимодействия рентгеновского излучения с веществом: когерентное рассеяние, некогерентное рассеяние и фотоионизация с последующей рекомбинацией.

Алгоритм моделирования

Поток первичных рентгеновских квантов с энергией E распространяется вдоль оси OZ (рис. 1, *а*). Изначально задается диаметр рентгеновского микрозонда $2R$, формируемого поликапиллярной рентгеновской линзой в плоскости XOY, в пределах которого для каждого

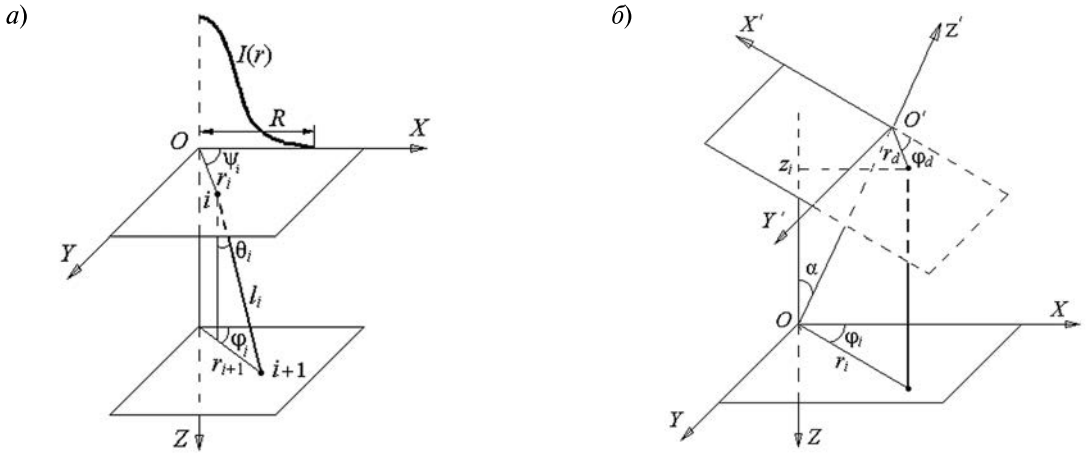


Рис. 1. Схемы распространения фотона в веществе: моделирование работы канала возбуждения (*а*) и канала детектирования (*б*)

рентгеновского фотона случайно выбирается координата r попадания на поверхность анализируемого объекта (аналогично подходу, использованному в работе [2]). Предполагается, что поток рентгеновского излучения падает перпендикулярно поверхности (для обеспечения минимальных размеров рентгеновского микрозонда на поверхности объекта исследований) и представляет собой пучок с Гауссовым профилем. Для фотона случайным образом выбираются координаты входа в анализируемый объект r_i и ψ_i, и разыгрывается длина свободного пробега фотона l_i. Тип атома, с которым взаимодействует фотон, определяется в соответствии с концентрацией атомов данного вида и атомного сечения взаимодействия. Вид взаимодействия обусловливается значением соответствующей вероятности процесса. Направление распространения фотона задается с помощью розыгрыша углов рассеяния θ и φ.

Если произошло рассеяние фотона, он приобретает новое направление распространения, поэтому далее в этой же точке случайным образом разыгрывается новая величина свободного пробега l до следующей точки взаимодействия. Координаты рассеянного фотона, претерпевшего столкновение, вычисляются согласно формулам

$$r_i = r_{i-1} + l_{i-1}\sin\theta; \qquad (1)$$

$$z_i = z_{i-1} + l_{i-1}\cos\theta. \qquad (2)$$

Если далее фотон выходит из образца, то число фотонов увеличивается ($N = N + 1$), и история фотона считается оконченной. Моделирование работы канала возбуждения прекращается, если произойдет поглощение фотона либо фотон пройдет через образец (для тонких объектов).

Для моделирования работы канала детектирования вводится новая система координат $X'O'Z'$, наклоненная в плоскости XOZ относительно системы координат канала возбуждения на угол α, причем $\alpha \in 0 - \pi/2$ (рис. 1, *б*) (центры систем O и O' разнесены для наглядности).

Координаты фотонов в точке с координатами r_i, z_i, φ_i, вышедших за пределы поверхности объекта, в системе координат детектора вычисляются по формулам

$$r_d = \left| r_i\cos\alpha + z_i\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi_i} \right|; \qquad (3)$$

$$z_d = r_i\cos\varphi_i\sin\alpha - z_i\cos\alpha; \qquad (4)$$

$$\varphi_d = -\mathrm{arctg}\frac{r_i\sin\varphi_i}{z\left[\cos\left(\pi/2-\alpha\right)\right]}. \qquad (5)$$

Затем разыгрывается величина свободного пробега для фотонов, вышедших на поверхность объекта в точке с координатами r_d, z_d, φ_d. Рассеяние фотонов в воздухе определяется двумя величинами: полярным углом рассеяния φ в системе координат детектора и азимутальным углом рассеяния ψ.

Для фотона, попавшего на поверхность бериллиевого окна детектора, проводится моделирование его распространения в бериллии. Моделирование пробега фотона осуществляется до момента выхода фотона из окна и его попадания в регистрирующий объем детектора. Процесс повторяется N^F, N^K и N^{KN} число раз, что соответствует числу флуоресцентных, когерентно и некогерентно рассеянных фотонов, вышедших за пределы поверхности анализируемого объекта. Моделирование проводится до выхода фотона из рассматриваемой области (включает объект, воздушный зазор между детектором и объектом, бериллиевое окно детектора) или до окончания траектории фотона по достижении величины насыщенного слоя.

Оптимизация геометрии схемы

Для расчета геометрических параметров рентгенооптической схемы микроанализатора (угла канала детектирования Ψ) (рис. 2) с использованием описанного алгоритма нами проведены теоретические исследования по моделированию относительных интенсивностей для ряда элементов в легкой матрице (рис. 3,*а*). Значения исходных фундаментальных параметров для расчетов взяты из справочника [3], а также из базы данных Национального института стандартов и технологий США NIST [4].

Как показывают расчеты (ММК, число историй 100000) (см. рис. 3,*а*), для получения интенсивности регистрируемого сигнала на достаточно высоком уровне отбор характеристического излучения необходимо производить под максимальным углом Ψ, который при значении $\Phi = 90°$ конструктивно возможно обеспечить на практике в пределах 45 – 50°.

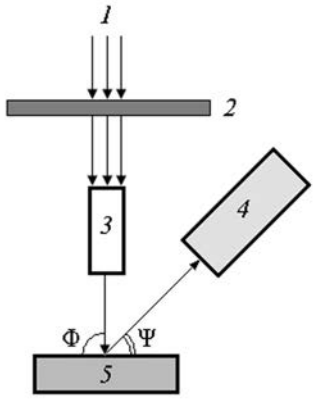


Рис. 2. Геометрия рентгенооптической схемы рентгенофлуоресцентного микроанализатора:
1 – источник излучения, *2* – блок фильтров, *3* – поликапиллярная линза, *4* – детектор, *5* – образец; Φ, Ψ – углы каналов возбуждения и детектирования

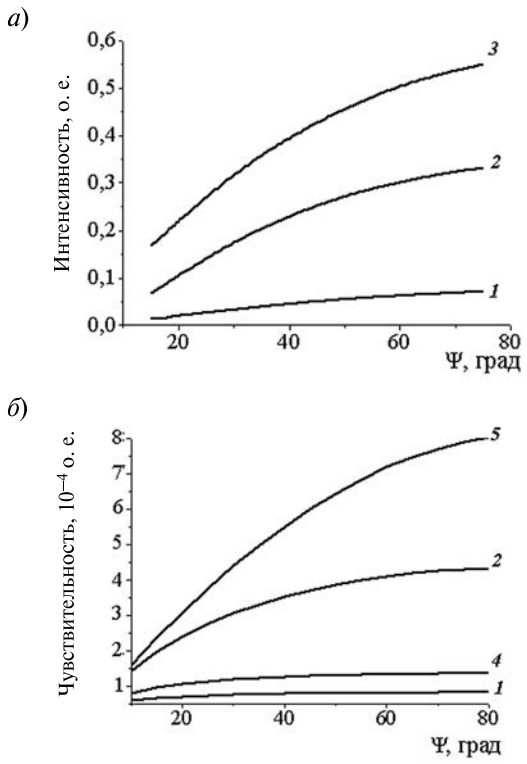


Рис. 3. Расчетные зависимости основных параметров характеристического излучения от его угла отбора для различных элементов в матрице CaO: Co (*1*), Zr (*2*), Pb (*3*), Zn (*4*), Ba (*5*); *а* – относительная теоретическая интенсивность, *б* – концентрационная чувствительность. Угол Φ = 90°; концентрация элементов 10 % (*а*) и 5 % (*б*)

Для проверки корректности построения модели работы микроанализатора были проведены расчеты по определению концентрационной чувствительности (приращения интенсивности аналитического сигнала при увеличении содержания анализируемого элемента на 1 %) с использованием традиционной монохроматической модели возбуждения [5] (рис. 3,*б*), согласно которой плотность потока на аналитической линии определяемого элемента N_i^A при моноэнергетическом возбуждении флуоресценции в насыщенном слое определяется следующими формулами:

$$N_i^A = \frac{K_i N_j C_A}{\frac{\mu_i}{\sin\Phi} + \frac{\mu_j}{\sin\Psi}}; \qquad (6)$$

$$K_i = \tau_{mj}^A \Omega S_0 \tau^A \cdot \omega^A \cdot p^A; \qquad (7)$$

$$\mu_i = C_A \mu_{iA} + C_н \mu_{iн}; \qquad (8)$$

$$\mu_j = C_A \mu_{jA} + C_н \mu_{jн}, \qquad (9)$$

где C, масс. доли – содержание анализируемого элемента либо наполнителя; μ_j, μ_i – массовые коэффициенты ослабления возбуждающего и флуоресцентного видов излучения, соответственно; N_j – плотность потока возбуждающего излучения; τ_{mj} – массовый коэффициент ослабления первичного излучения; τ – доля возбуждаемого уровня излучения в общем поглощении; ω – выход флуоресценции уровня; p – вероятность испускания характеристического фотона; Φ, Ψ – углы каналов возбуждения и детектирования; Ω – телесный угол, под которым из области анализа виден детектор; S_0 – площадь анализируемой области. Индексы «*A*» относятся к атомам элемента, «н» – к наполнителю.

Как видно из рис. 3, результаты расчетов согласуются между собой, что в свою очередь служит надежным критерием корректности построения модели.

Результаты определения оптимальной геометрии рентгенооптической схемы на основе моделирования ММК были использованы при разработке рентгенофлуоресцентного микроанализатора РАМ-30μ в ЗАО «Научные приборы». Чтобы оценить эффективность оптимизации геометрии схемы с целью приборной

Сравнение результатов расчета метрологических параметров с данными аттестации образцов ювелирных сплавов

Химический элемент	Данные аттестации		Результат расчета			
	C	ΔC	$\overline{C}^A$	σ_r	d_r	σ
	%					
Au	20,10	0,15	19,84	3,27	1,30	0,65
Ag	1,00	0,02	0,92	13,04	8,00	0,12
Cu	1,00	0,02	0,98	9,18	2,00	0,09
Ni	3,50	0,05	3,20	8,75	8,57	0,28
Zn	1,03	0,01	1,12	12,50	8,73	0,14
Cd	0,99	0,03	1,06	8,49	7,07	0,09
Pd	1,00	0,01	0,94	17,02	6,00	0,16

Обозначения: $C, \Delta C$ – значение концентрации элемента и абсолютная погрешность; $\overline{C}^A$ – среднее значение концентрации элемента; σ_r, d_r – воспроизводимость и правильность анализа; σ – среднеквадратичное отклонение

реализации рентгенофлуоресцентного микроанализа, мы провели анализ образцов ювелирных сплавов на основе золота с аттестованными значениями содержания в них химических элементов (с оценкой соответствующих погрешностей).

Выбор образцов был связан не только с известным содержанием элементов, но и с гомогенностью их состава (благодаря особенностям фазового состава и режиму их термообработки) [6]. Сравнение результатов расчета с известными значениями концентрации химических элементов представлено в таблице.

В качестве нормы погрешности количественного химического анализа при определении отдельных компонентов принимается табулированное допустимое среднеквадратичное отклонение $\sigma_Д$, однако для методик полуколичественного анализа значения σ_r могут превышать 30 % [7], т. е. $\sigma_Д \geq 30\%$. Согласно требованиям документа [8] по критерию «ничтожной погрешности», при $\sigma_Д \geq 5\%$ $|d_r| \leq 0{,}33\ \sigma_Д$.

Анализ погрешностей рентгеноспектрального флуоресцентного определения информативных элементов в ювелирных сплавах позволяет сделать вывод об эффективности оптимизации рентгенооптической схемы микроанализатора с использованием алгоритма моделирования ММК, представленного в настоящей работе.

Полученные результаты служат научно-технической основой для производства в ЗАО «Научные приборы» рентгенофлуоресцентных микроанализаторов РАМ-30μ, предназначенных для исследований объектов методами оптической микроскопии, локального элементного микроанализа, проведения элементного картирования и рентгенографических исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бахвалов, А.С.** Микрозондовые исследования на рентгеновском аналитическом микроскопе РАМ-30μ [Текст] / А.С. Бахвалов, В.А. Елохин, В.И. Николаев [и др.] // Тез. VII Всерос. конф. по рентгеноспектральному анализу. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2011. – С. 30.

2. **Сетейкин, А.Ю.** Моделирование процессов распространения лазерного излучения в многослойных биоматериалах методом Монте-Карло [Текст] / А.Ю. Сетейкин // Моделирование систем. – 2003. – № 2 (6). – С. 31–37.

3. **Блохин, М.А.** Рентгеноспектральный спра-

вочник [Текст] / М.А. Блохин, И.Г. Швейцер. – М.: Металлургия, 1982. – 374 с.

4. База данных Национального института стандартов и технологий США NIST [Электронный ресурс] http://www.nist.gov/pml/data/xcom/index.cfm

5. **Блохин, М.А.** Физика рентгеновских лучей [Текст] / М.А. Блохин. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 518 с.

6. **Фесенко, А.В.** Определение основных и неосновных компонентов сплавов золота при криминалистическом исследовании [Текст] / А.В. Фесенко, Н.Г. Миловзоров // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева). – 2002. – Т. XLVI. – № 4. – С. 81–87.

7. **ОСТ 41-08-212-04.** Управление качеством аналитических работ. Нормы погрешности при определении химического состава минерального сырья и классификация методик лабораторного анализа по точности результатов [Текст]. – Москва, 2004. – 24 с.

8. **ОСТ 41-08-205-04.** Управление качеством аналитических работ. Методики количественного химического анализа. Разработка, аттестация, утверждение [Текст]. – Москва, 2004. – 106 с.

УДК 543.427.4

Е.В. Чижова, Н.Н. Ершов

РАСЧЕТ СИСТЕМЫ ФОКУСИРОВКИ ПЕРВИЧНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В РЕНТГЕНОФЛУОРЕСЦЕНТНОМ МИКРОАНАЛИЗАТОРЕ

На сегодняшний день наиболее эффективным способом фокусировки излучения в области энергий рентгенофлуоресцентного анализа является использование поликапиллярной рентгеновской оптики, физические и технологические принципы которой впервые были предложены и развиты М.А. Кумаховым в середине 80-х годов [1, 2]. Поликапиллярная оптика позволяет передавать энергию в широком диапазоне и фокусировать рентгеновское излучение в пучки различных диаметров. Возможности капиллярной оптики для решения задач рентгеновского анализа, в частности рентгенофлуоресцентного микроанализа, достаточно подробно изучены [3, 4].

Поликапиллярная рентгеновская линза представляет собой монолитный блок из нескольких сотен тысяч стеклянных микрокапилляров, имеющих сечение, переменное по длине. В каждом из них происходит распространение рентгеновских лучей за счет эффекта полного внешнего отражения, а фокусировка излучения осуществляется за счет формы линзы. Современные поликапиллярные системы позволяют фокусировать рентгеновское излучение в пятно диаметром до 20 мкм с коэффициентом усиления интенсивности излучения до 10000.

Важное значение для реализации оптимальной схемы формирования рентгеновского микрозонда на основе поликапиллярной оптики имеет взаимное совмещение оптических осей системы рентгеновский источник – линза, определяемое низкими значениями критического угла полного внешнего отражения поликапиллярной рентгеновской оптики. При выборе параметров сопряжения капиллярной линзы с рентгеновской трубкой одним из важных аспектов является неравномерность пространственного распределения потока рентгеновского излучения, вызванная неравномерным поглощением рентгеновских лучей на поверхности и в толще анода [5].

В настоящей работе приведены результаты теоретических исследований по определению параметров оптимального сопряжения системы рентгеновская трубка-поликапиллярная линза в рентгенофлуоресцентном микроанализаторе РАМ-30μ, который разрабатывается в ЗАО «Научные приборы» и предназначен для исследований объектов методами оптической микроскопии, локального элементного микроанализа, проведения элементного картирования и рентгенографических исследований [6].

Характеристики системы рентгеновская трубка-поликапиллярная рентгеновская линза

В рентгенофлуоресцентном микроанализаторе в качестве источника первичного излучения используется микрофокусная рентгеновская трубка с молибденовым анодом типа БСВ-30. Для фокусировки первичного потока используется поликапиллярная рентгеновская линза, рассчитанная и изготовленная в соответствии с параметрами источника первичного излучения по особому техническому заданию. Монолитная поликапиллярная линза модели 57mls07 заполнена гелием, входное и выходное окна линзы выполнены из бериллиевой фольги. Геометрические и физические параметры линзы приведены соответственно в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Геометрические параметры линзы модели 57mls07

Параметр	Значение
Фокусное расстояние, мм: переднее f_1 заднее f_2	 61,0 ± 1,0 11,0 ± 0,1
Длина L, мм	96,8
Оптическая длина, мм $R = f_1 + f_2 + L$	 168,8 ± 1,0
Диаметр капиллярной структуры, мм: входной выходной максимальный	 5,6 2,1 7,1
Входной угол $\alpha_д$, рад	0,085

Таблица 2

Физические параметры линзы модели 57mls07 в различных энергетических диапазонах

Диапазон энергии, кэВ	Размер пятна в фокусе (FWHM), мкм	Усиление плотности потока в фокусе ($K_{ус}$), разы
3 – 5	32	600
5 – 7	33	3376
7 – 10	36	6135
10 – 15	34	6832
15 – 20	28	7232
20 – 25	25	3818
25 – 30	26	948
30 – 38	29	179

FWHM (англ. full width at half maximum) – полная ширина на половине амплитуды

Моделирование расходимости и интенсивности первичного потока

Для определения оптимальных параметров сопряжения элементов системы фокусировки необходима информация о выходных параметрах рентгеновской трубки БСВ-30, а именно – о зависимости интенсивности рентгеновского излучения от угла отбора. На основе технических характеристик рентгеновской трубки и закономерностей распределения потока рентгеновского излучения [5] нами проведено моделирование расходимости и интенсивности первичного потока (рис. 1,*а*). С этой целью мы рассчитывали изменение интенсивности первичного потока в диапазоне углов отбора излучения 3° – 15° для рабочих напряжений рентгеновской трубки БСВ-30 (рис. 1,*б*).

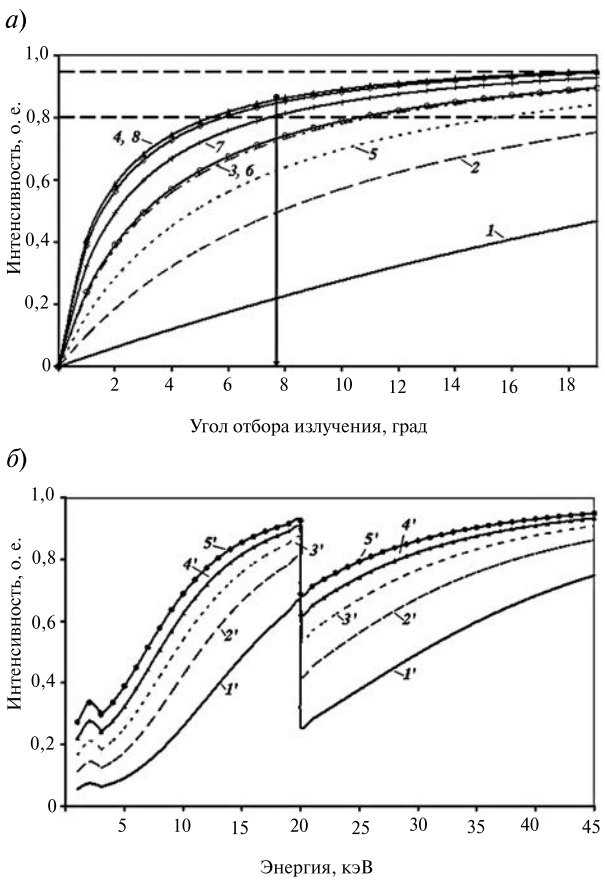


Рис. 1. Расчетные зависимости интенсивности первичного потока рентгеновского излучения от угла отбора и энергии потока; *а* – при значениях энергии, кэВ: 5 (*1*), 10 (*2*), 15 (*3*), 20(*4*), 25(*5*), 30(*6*), 35(*7*), 40(*8*); *б* – при значениях угла отбора, град: 3 (*1'*), 6 (*2'*), 9(*3'*), 12(*4'*), 15(*5'*)

На рис. 1,*а* стрелкой отмечена нижняя граница оптимального значения угла отбора, соответствующая снижению максимального значения относительной интенсивности излучения менее чем на 10 %.

Энергетический расчет системы рентгеновская трубка-поликапиллярная линза

Для оценки изменения характеристик сфокусированного первичного потока на основе данных о коэффициенте усиления рентгеновской линзы $K_{ус}$ (см. табл. 2), определяемом в работе [7] как отношение интенсивности потока рентгеновского излучения в фокусе линзы (рис. 2,*а*) к интенсивности потока прямого пучка (рис. 2,*б*), измеренного с помощью диафрагмы диаметром 5 мкм, нами проведено моделирование пропускания линзы.

Для коэффициента пропускания поликапиллярной рентгеновской линзы справедливо выражение

$$T_{л} = \frac{\Omega_{д} e^{-\mu_{в} R} K_{ус} S_{ф}}{\Omega_{вх} e^{-\mu_{в}(f_1+f_2)} S_{д}} = \frac{\Omega_{д} e^{-\mu_{в} L} K_{ус} S_{ф}}{S_{д} \Omega_{вх}}, \quad (1)$$

где $\mu_{в}$ – линейный коэффициент ослабления рентгеновского излучения воздухом; $S_{ф}$, $S_{д}$ – площади фокуса поликапиллярной рентгеновской линзы и диафрагмы, соответственно; $\Omega_{д}$ – телесный угол, под которым видна диафрагма; $\Omega_{вх}$ – входной телесный угол поликапиллярной рентгеновской линзы.

Для расчета значений телесных углов были использованы формулы

$$\Omega_{д} = \frac{S_{д}}{R^2}; \quad (2)$$

$$\Omega_{вх} = 2\pi\left[1 - \cos\left(\alpha_{л}/2\right)\right], \quad (3)$$

где $R = f_1 + f_2 + L$.

Результаты расчета коэффициента пропускания поликапиллярной рентгеновской линзы модели 51mls07 представлены на рис. 3,*а*.

Смоделированный спектр рентгеновского излучения рентгеновской трубки БСВ-30 (для условий $U_{ан}$ = 45 кВ, $I_{ан}$ = 1 мА) в фокусе поликапиллярной линзы, расположенной под углом отбора рентгеновского излучения 9°, представлен на рис. 3,*б*.

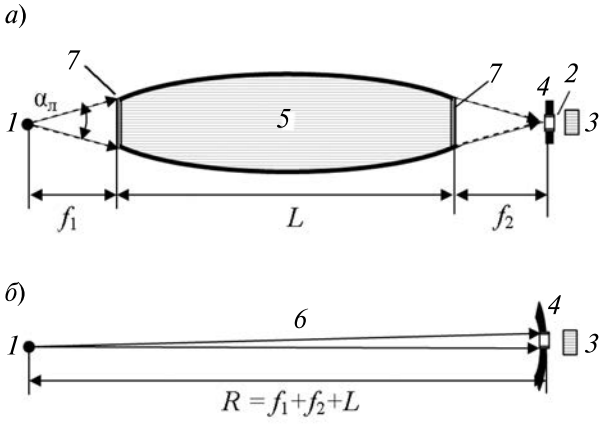


Рис. 2. Схема для определения интенсивности потока рентгеновского излучения в фокусе линзы (*а*) и без линзы (*б*):
1 – фокус рентгеновской трубки (точечный источник); *2* – фокус линзы; *3* – детектор; *4* – диафрагма (диаметр 5 мкм); *5* – гелий; *6* – воздух; *7* – окна из бериллия

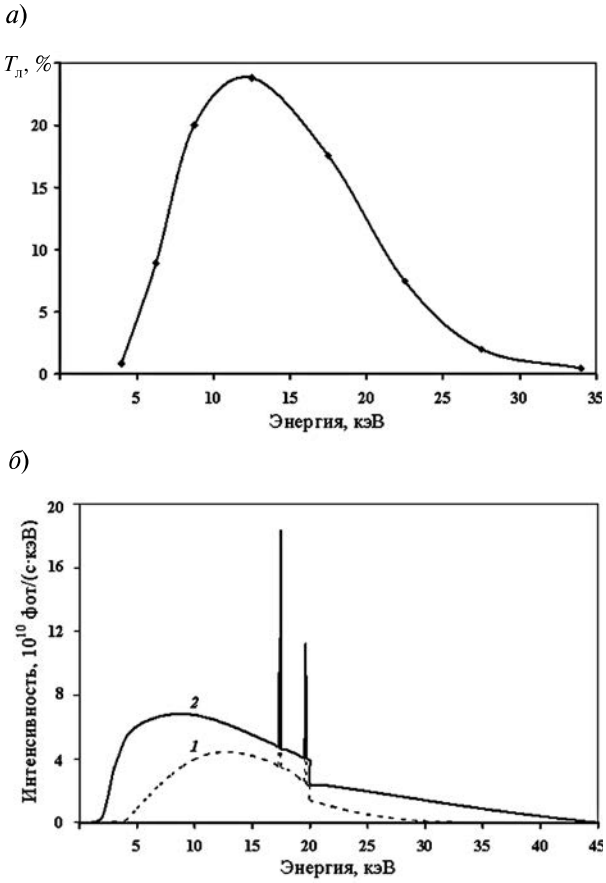


Рис. 3. Расчетные спектры пропускания капиллярной линзы (*а*) и излучения рентгеновской трубки (*б*) с использованием линзы (*1*) и без ее использования (*2*). Угол отбора излучения 9°

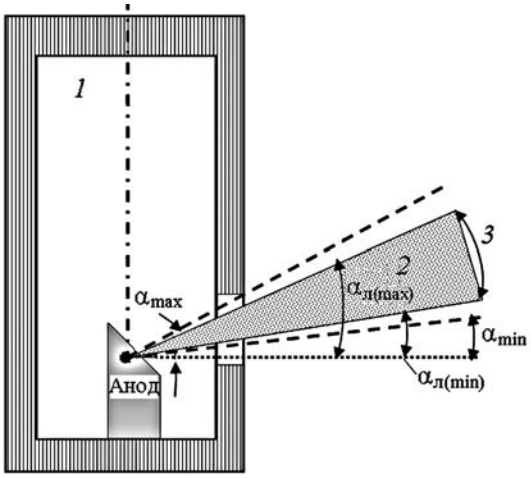


Рис. 4. Область сопряжения поликапиллярной рентгеновской линзы модели 51mls07 с рентгеновской трубкой БСВ-30:
1 – рентгеновская трубка; *2* – поток рентгеновских лучей; *3* – область установки линзы от $\alpha_{л(min)}$ до $\alpha_{л(max)}$. Значения углов: $\alpha_{min} = 6°$, $\alpha_{max} = 18°$; $\alpha_{л(min)} = \alpha_{min} + \alpha_{вх} = 9°$; $\alpha_{л(max)} = \alpha_{max} - \alpha_{вх} = 15°$

Как видно из результатов моделирования, оптимальное расположение поликапиллярной линзы относительно центральной оси выходного окна рентгеновской трубки находится в диапазоне углов отбора от 9 до 15°. При этом увеличение интегральной интенсивности потока излучения на выходе линзы достигает 25 %. На рис. 4 показана область сопряжения поликапиллярной рентгеновской линзы модели 51mls07 с рентгеновской трубкой БСВ-30.

Итак, с целью оптимизации условий формирования первичного потока рентгеновского излучения в рентгенофлуоресцентном микроанализаторе проведены расчет расходимости и моделирование интенсивности потока первичного рентгеновского излучения на выходе рентгеновской трубки БСВ-30, смоделирована энергетическая зависимость системы рентгеновская трубка-поликапиллярная линза. На основе расчетных данных определены параметры сопряжения рентгеновской трубки с поликапиллярной рентгеновской линзой. Полученные результаты использованы при разработке системы формирования рентгеновского микрозонда в разрабатываемом ЗАО «Научные приборы» рентгенофлуоресцентном микроанализаторе РАМ-30μ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аркадьев, В.А.** Многократное отражение рентгеновского излучения на изогнутой поверхности [Текст] / В.А. Аркадьев, М.А. Кумахов // Поверхность. Физика, химия, механика.– 1986.– № 10.– С. 25–32.

2. **Kumakhov, M.A.** Multiple reflection from surface X-Ray optics [Text] / M.A. Kumakhov, F.F. Komarov // Physics Reports.– 1990.– Vol. 191.– No 5.– P. 289–350.

3. **Haschke, M.** Examination of polycapillary lenses for their use in micro-XRF spectrometers [Text] / M. Haschke, M. Haller // X-Ray Spectrometry.–2003.– Vol. 32.– P. 239–247.

4. **Matsuda, A.** X-ray energy dependence of the properties of the focused beams produced by polycapillary X-Ray lens [Text] / A. Matsuda, Y. Nodera, K. Nakano [et al.] // Analytical sciences.– 2008.– Vol. 24.– P. 843–846.

5. **Хараджа, Ф.Н.** Общий курс рентгенотехники [Текст] / Ф.Н. Хараджа.– М., Л.: Госэнергоиздат, 1956.– 564 с.

6. **Бахвалов, А.С.** Приборы для рентгенофлуоресцентного микроанализа и элементного картирования [Текст] / А.С. Бахвалов, В.И. Николаев, Е.В. Чижова // Сб. науч. тр. II Междунар. науч.-практ. конф., СПб, 8 – 10 дек. 2009 г. – СПб: Изд-во СПБГПУ, 2009.– С. 95–96.

7. **Романов, А.Ю.** Исследование рентгенооптических свойств оптики Кумахова [Текст] / А.Ю. Романов, И.В. Дмитриев, А.Ю. Акулов // Инженерная физика.– 2004.– № 1.– С. 43–47.

УДК: 621.386.85, 66.085.3/.5, 53.088

В.О. Миронов

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ФОТОННЫХ ПУЧКОВ В ДИСТАНЦИОННОЙ ЛУЧЕВОЙ ТЕРАПИИ ПО ДАННЫМ ИОНИЗАЦИОННЫХ МАТРИЦ

При проведении контроля качества работы медицинских линейных ускорителей электронов возникает необходимость оценки геометрических и дозиметрических параметров терапевтических фотонных пучков в клинических условиях. При этом рассматривают такие параметры, как размер поля облучения и характеристики профильных зависимостей. Кроме того, производится оценка величин полутени с обеих сторон профиля, угла наклона дозного распределения поля при различных положениях поворотной платформы ускорителя (гентри).

Для формирования полей облучения на медицинских линейных ускорителях устанавливают многолепестковые коллиматоры (МЛК) (рис. 1,*а*), состоящие из двух наборов вольфрамовых параллельных пластин, способных перемещаться во взаимно противоположных направлениях, формируя тем самым заданную геометрию поля облучения [1, 2]. Лепестки МЛК имеют ступенчатую форму боковой поверхности для минимизации «просачивания» части отпущенной дозы над закрытыми участками области облучения (межлепестковые утечки).

На рис. 1,*а* представлено схематическое изображение внутреннего устройства многолепесткового коллиматора и его основные составные части. Диафрагмы МЛК *1* представляют собой плоскопараллельные вольфрамовые «шторки», определяющие координаты поля по оси *Y*, тогда как лепестки определяют координаты поля по оси *X* (рис. 1, *б*). Отсек *4*, называемый «слот для дополнительных устройств», включает в себя слоты № 1 (в него устанавливаются физические клинья) и № 3 – для установки проволочного перекрестия (поз. *5*, *6*) [2]. На рис. 1,*б* схематически представлено сформированное поле облучения от многолепесткового коллиматора, при этом конусность фотонного пучка не показана. Рис. 1 приведен для демонстрации процесса формирования поля облучения, а также влияния на его параметры возможных паразитных факторов. Например, по оси *X* могут

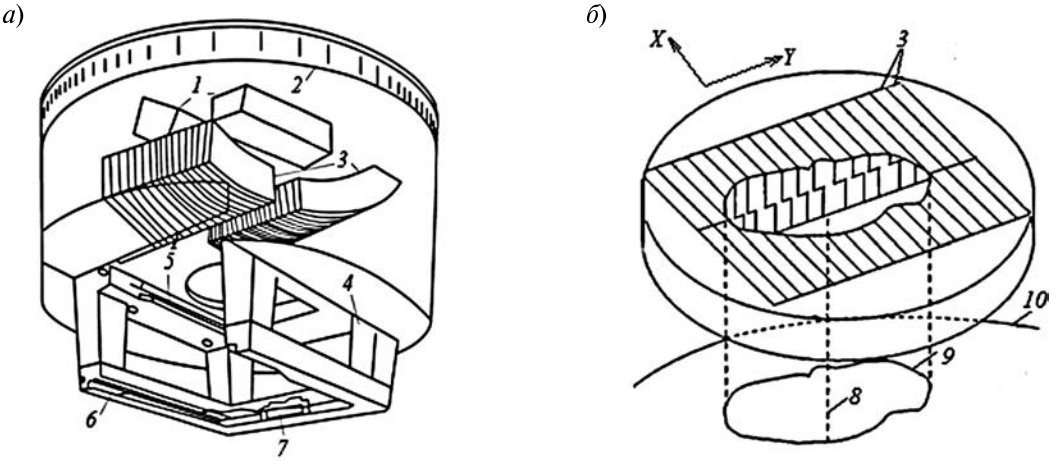


Рис. 1. Схематическое изображение внутреннего устройства многолепесткового коллиматора (МЛК) (*а*) и сформированного поля облучения (*б*):
1 – диафрагмы МЛК, *2* – линейка, *3* – лепестки МЛК, *4* – слот для дополнительных устройств, *5* – слот № 1 для установки физических клиньев, *6* – слот № 3 для установки перекрестия, *7* – определяющий разъем для слота № 3, *8* – центральная ось пучка, *9* – сформированное поле облучения, *10* – поверхность облучения

возникать всплески интенсивности излучения, составляющего долю от отпущенной дозы, в результате многолепестковой утечки. Следует отметить, что эффекты рассеяния от концевых поверхностей шторок *1* (рис. 1, *а*) имеют непрерывный характер, тогда как межлепестковые утечки вызывают значительные отклонения от отпущенной дозы.

В клинических условиях оценка характеристик облучающего поля проводится при помощи методов пленочной дозиметрии с применением радиохромных и рентгеновских пленок [2], устройств для портальной визуализации [3], а также ионизационных камер, установленных в водном фантоме, а также с помощью ионизационных детекторных и полупроводниковых матриц [3 – 5].

Ионизационная матрица представляет собой совокупность вентилируемых ионизационных камер, размещенных с определенным шагом на водоэквивалентной пластине. При использовании системы для сбора и анализа дозиметрических данных, по сигналам от каждой камеры строится общая картина интенсивности поля облучения.

Устройство для портальной визуализации (на рисунках не показано) представляет собой матрицу, выполненную на основе *pin*-диодов.

Данная оценка может проводиться для полей различной конфигурации: прямой, треугольной, фигурной. В состав первой входят открытые поля, в состав второй – поля с использованием физических и виртуальных клиньев, в состав третьей – поля с использованием защитных блоков, клиньев и иных модификаторов, применяющихся одномоментно.

Физический клин представляет собой металлическую однородную призму с заданным углом наклона, равным углу наклона дозного распределения. Для случая виртуального клина, реализуемого синхронным передвижением лепестков МЛК, угол наклона дозного распределения определяется скоростью передвижения лепестков.

Распределение дозы для размера поля 25×25 см при угле наклона физического клина 15° в модельном водном фантоме схематически представлено на рис. 2. Приведены расчетные значения, полученные на станции планирования XiO, и зависимости доли формируемой дозы от отпущенной (в процентах) на заданной

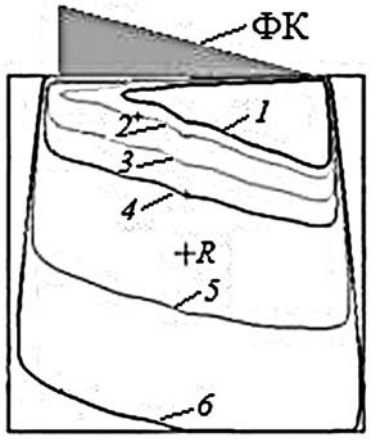


Рис. 2. Треугольное дозное распределение поля для фотонных пучков с энергией 6 МэВ по данным XiO CMS. Замкнутые линии изодозы, %: 105,0 (*1*), 100,0 (*2*), 90,0 (*3*), 80,0 (*4*), 50,0 (*5*), 30,0 (*6*); ФК – физический клин, *R* – референсная точка

глубине. Общее же значение дозы, которую необходимо подвести при заданной конфигурации поля, чтобы получить значение, равное 100 сГр на глубине 10 г/см^2, составило 289,5 сГр. Координаты референсной (опорной) точки *R* были следующие: $X = -4{,}05$ см; $Y = 0{,}00$ см; $Z = 11{,}60$ см. Точка нормирования 200 сГр была принята за 100 %.

Для детальной оценки расчетных и экспериментальных данных необходимо предварительно загрузить этот массив в матрицу и затем произвести облучение при данных планах лечения, загруженных на консоль ускорителя. В данной работе такая оценка не выполнялась.

Анализ представленных в литературе [8 – 12] экспериментальных и теоретических результатов показал, что обычно выполняемая оценка геометрических и дозиметрических параметров полей затрагивала только макроскопические погрешности, т. е. производилась оценка всего поля облучения в целом; тогда как ошибкам в определении основных параметров, формирующих каждую часть поля облучения, не уделялось должного внимания. Не рассматривались также погрешности измерения для отдельных частей профиля ряда парных объектов: пленка – матрица, пленка – портальная визуализация, матрица – система планирования.

Учет данных погрешностей играет важную роль для оптимизации параметров облучения и геометрии поля в клинических условиях, для сведения к минимуму паразитных факторов и установления пределов применения детектирующих устройств.

В связи с этим основная цель данной работы состояла в оценке параметров полей облучения для фотонных пучков мегаэлектронвольтного диапазона энергий по данным ионизационных матриц.

Оборудование и материалы

Работа выполнялась на базе Санкт-Петербургского клинического научно-практического центра специализированных видов медицинской помощи (онкологической); при этом использовался линейный медицинский ускоритель электронов Mevatron Primus Siemens. Эта установка позволяла генерировать фотонные пучки с энергией 6 МэВ и формировать поля облучения заданной геометрии при помощи 82-лепесткового МЛК Optifocus, согласно планам, разработанным на станции планирования дистанционной лучевой терапии XiO.

Измерения проводились с помощью детекторной ионизационной матрицы ImRT MatriXX, размещенной на терапевтическом столе, на расстоянии источник – поверхность (РИП), равном 100 см. В качестве детектирующих элементов в данном устройстве выступали 1020 вентилируемых ионизационных камер, размещенных на площади 32 × 32 см, с номинальным рабочим объемом 0,08 $см^3$ каждая (их высота – 5,0 мм, диаметр – 4,5 мм) [10]. При этом толщина водоэквивалентного материала крышки матрицы составляла 3,6 мм. Максимально оцениваемый размер поля для данной матрицы конструктивно составлял 24 × 24 см. Для сбора и анализа полученных зависимостей от ионизационной матрицы ImRT MatriXX использовалось приложение Omni-Pro ImRT v.1.0. Для оценки параметров поля облучения существует два способа: первый состоит в облучении матрицы без предварительно загруженных в нее контуров из системы планирования для этого поля; при втором способе контуры поля загружаются в матрицу, и затем производится сопоставление измеренных параметров по системе планирования с экспериментально полученными данными при облучении. Для оценки качества работы матрицы нами был использован первый метод, поскольку он обеспечивал наблюдение реальной картины облучения без использования дополнительных коэффициентов оптимизации. Для оценки профильных зависимостей в воде использовался водный фантом Blue Phantom с установленными в него ионизационными камерами CC13.

Методика измерений

Матрица размещалась на наборе из 10 одинаковых пластин, изготовленных из полистерена с примесью 2,1 % TiO_2; толщина каждой – 1 см. Далее сверху на матрицу накладывался слой из трех пластин, сделанных из того же материала, но разной толщины – 10, 5 и 1 мм; таким образом глубина измерений получалась равной 1,6 см. Это позволяло достигать максимума энергии ионизации для фотонного пучка в 6 МэВ (согласно теореме Брэгга–Грэя) в точке размещения и, как следствие, получать максимально четкие границы изображения. Установка десяти пластин под матрицей давала возможность минимизировать эффекты обратного рассеяния от материала терапевтического стола. Данные пластины широко применяются в клинической дозиметрии и называются пластинчатым водоэквивалентным фантомом SP33 RW3 «Белая вода».

Для выведения матрицы на рабочий режим она прогревалась в течение 15 мин и облучалась дозой в 500 сГр при энергии пучка в 6 МэВ [5, 10].

Конструкция, состоящая из пары твердотельный фантом – матрица, размещалась на терапевтическом столе, на расстоянии источник – поверхность в 100 см для перпендикулярного поверхности падения пучка (рис. 3,*а*) и позиционировалась при помощи лазерной системы Gammex Lasers. Центральная ось пучка проходила через центр рабочего поля матрицы.

Для оценки погрешности в качестве эталонных брались данные, полученные в водном фантоме Blue Phantom с применением двух ионизационных камер CC13 в качестве полевой и опорной (референсной). В данном случае полевой называется камера, которая снимает профильные зависимости и находится в водном фантоме на заданной глубине (в воде). За опор-

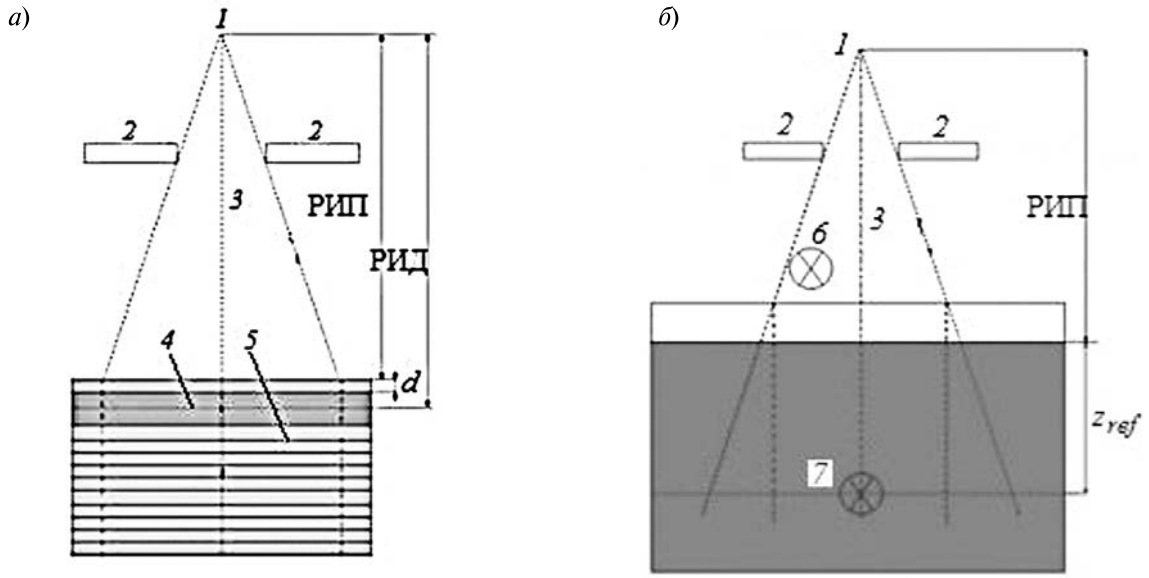


Рис. 3. Схемы измерения параметров терапевтического фотонного пучка при помощи ионизационной детекторной матрицы (*а*) и при помощи водного фантома (*б*) [11]:
1 – источник излучения; *2* – коллиматор; *3* – центральная ось пучка;
4 – детекторная матрица; *5* – твердотельный фантом; *6, 7* – опорная и полевая камеры;
d – глубина измерения; z_{ref} – референсная глубина измерений; РИП, РИД – расстояния источник – поверхность и источник – детектор

ную (референсную) принимается камера, которая устанавливается в водном фантоме над поверхностью воды в поле падающего пучка и сглаживает случайные колебания этого пучка; она позволяет точно оценить значение дозы для полевой камеры при сопоставлении значений поглощенной дозы в воде и воздухе, а также соответствующих коэффициентов рассеяния.

Схема измерений параметров терапевтического пучка в твердотельном и водном фантомах представлена на рис. 3.

Нами были измерены параметры полей со следующими размерами, см: 5×5, 10×10, 15×15, 20×20 в открытом положении и с применением физических клиньев при углах наклона, град: 15, 30, 45 и 60.

Построение итоговых зависимостей и их последующий анализ проводился в приложении MS Excel 2010.

Оценка погрешностей профильных зависимостей

Оценка погрешностей измерений выполнялась согласно методике, изложенной в работе [11]. Результаты измерений в водном фантоме, принятые за эталонные [13], сопоставлялись с данными, полученными с помощью MatriXX. Погрешность вычислялась как разность значений дозы между этими значениями при одном и том же расстоянии от центральной оси пучка [11, 12] (рис. 4). На данном рисунке сплошной линией показаны эталонные значения, полу-

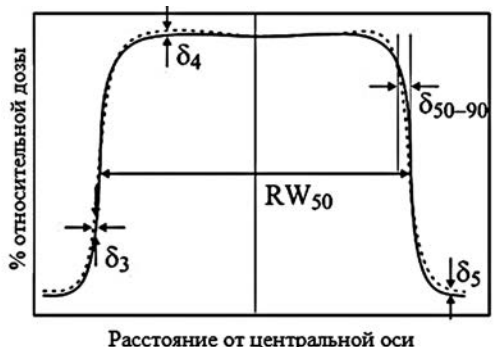


Рис. 4. Продольный профиль поглощенной дозы в воде (сплошная линия) фотонных пучков (протоколы TRS-430, TRS-398) с указанием измеряемых погрешностей: δ_3, δ_5 – подъема и порога профиля; δ_4 – области насыщения; $\delta_{50\text{-}90}$ – величины полутени; RW_{50} – радиологическая ширина. Пунктир – результаты измерения другими методами

чаемые, согласно протоколу TRS-398 [3], для водного фантома, а пунктиром – значения, полученные другими методами, например пленочной дозиметрией, матрицей и т. п.

Оценка угла наклона гентри и размера поля при заданном угле

При оценке угла наклона гентри и получаемой геометрии поля регистрировались карты интенсивностей излучения при повороте гентри на углы, град: 15, 30, 45 и 60. При этом размер поля составлял 10 × 10 см (без использования физических клиньев). Это давало возможность оценить получаемый размер поля в зависимости от углов наклона гентри, а также уточнить области применения матрицы. Это также позволяло прослеживать изменения в геометрии облучаемого поля, сравнивать оценки наклонных полей без изменения положения матрицы. Размещение конструкции матрица – фантом оставалось неизменным (рис. 3, *а*).

Результаты и их обсуждение

Оценка погрешностей профильных зависимостей при нулевом положении гентри для физических клиньев. Для оценки погрешностей, вызванных использованием MatriXX, за основу брались двух- и трехмерное распределения поглощенной дозы, а также профильная зависимость (рис. 5).

Согласно методике, изложенной в работе [11], значение радиологической ширины (RW) составляло 0,15 %, погрешности порога профиля (δ_5) – 2,09 %, подъема профиля (δ_3) – 2,9 %, области насыщения (δ_4) – 0,55 %. Погрешности величин полутени с левой ($\delta_{50\text{-}90л}$) и правой ($\delta_{50\text{-}90п}$) сторон профиля составили 2,98 и 2,96 %, соответственно; угол наклона дозного распределения – 65°. На рис. 6 представлены

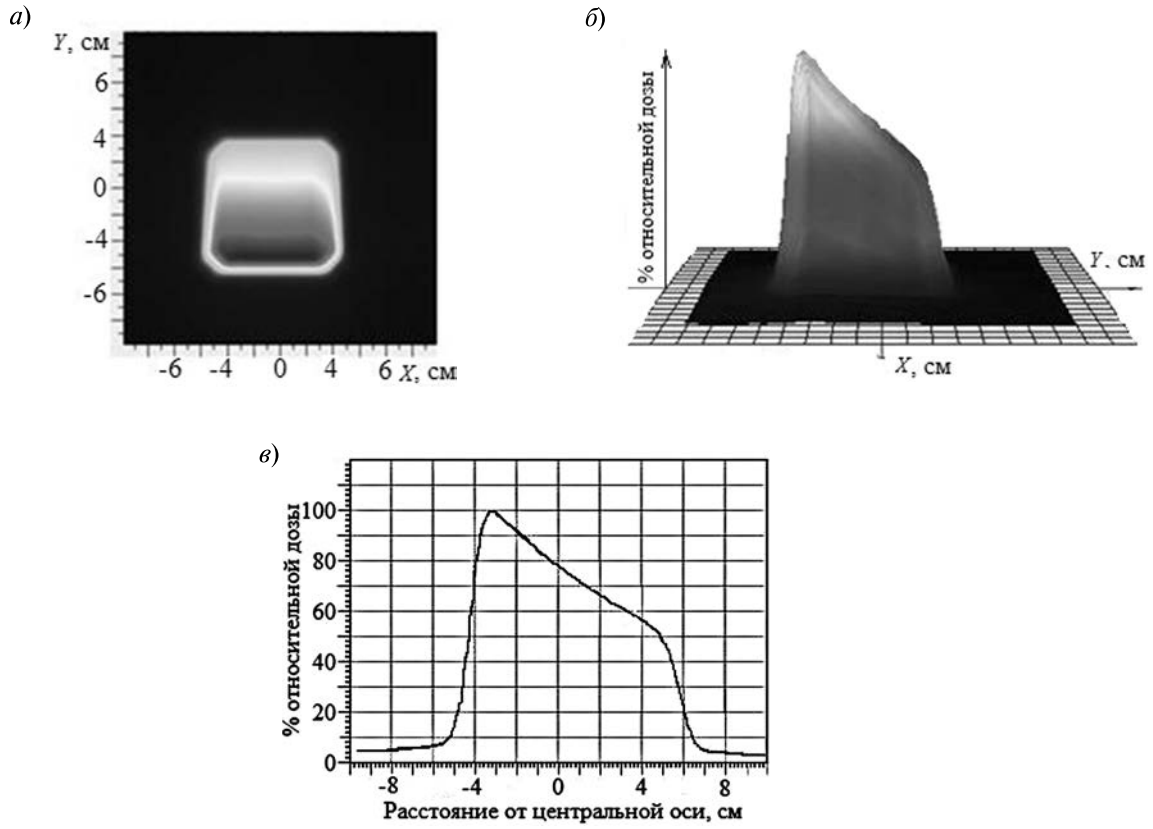


Рис. 5. Графическое представление основных зависимостей, использованных для оценки погрешностей: пространственные распределения поглощенной дозы в двух-(*а*) и трех-(*б*)мерных координатах, а также соответствующая им профильная зависимость (*в*) для фотонного пучка с энергией 6 МэВ при угле физического клина 60°. Положение гентри 0°, размер поля 10 × 10 см

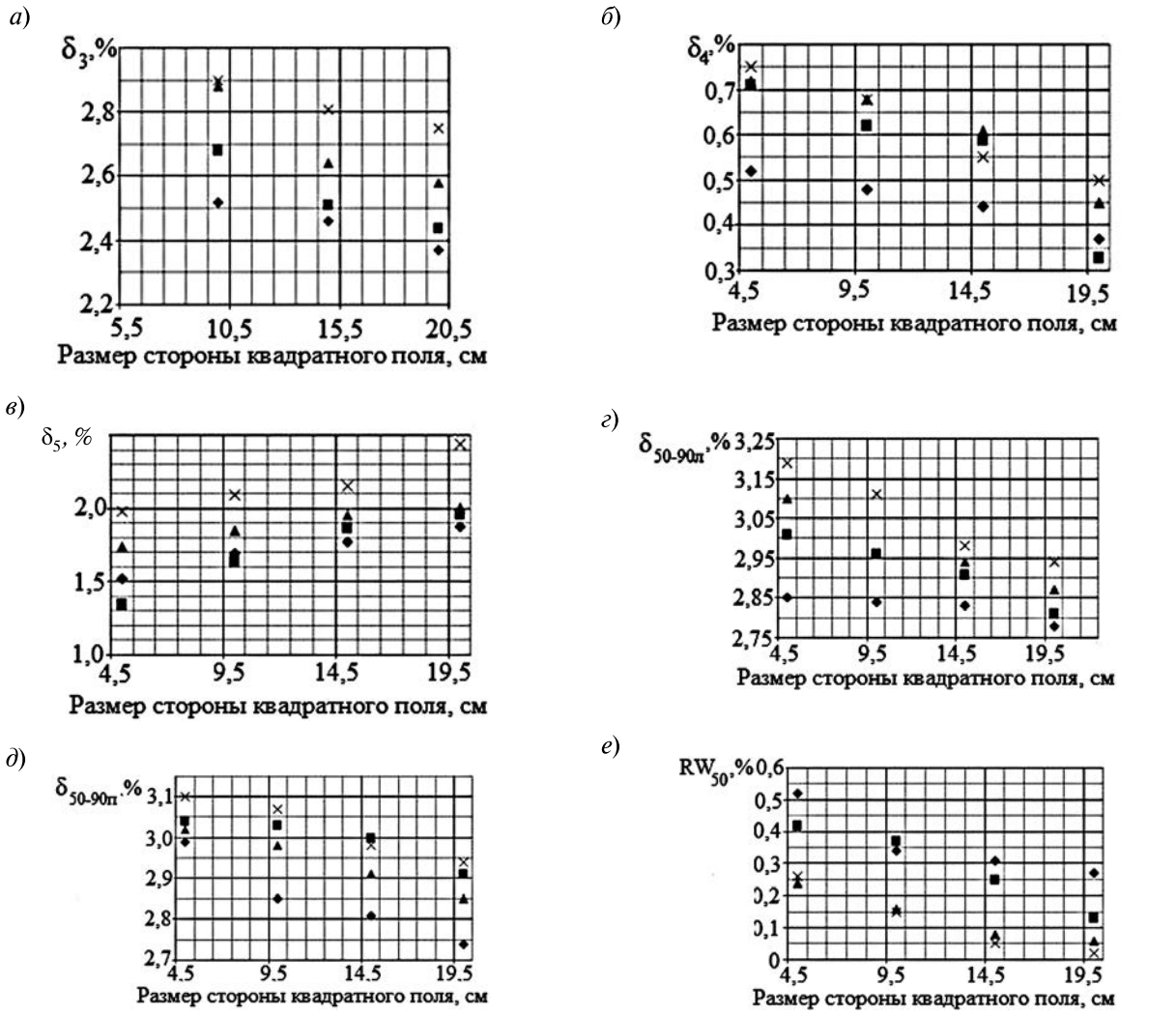


Рис. 6. Зависимости погрешностей δ_3 (*а*), δ_4 (*б*), δ_5 (*в*), $\delta_{50\text{-}90л}$ (*г*), $\delta_{50\text{-}90п}$ (*д*), RW (*е*) для фотонных пучков с энергией 6 МэВ от размера поля для различных углов физических клиньев, град: 15 (♦), 30 (■), 45 (▲), 60 (×); нулевое положение гентри

результаты сравнительной оценки данных параметров для поля размером 10 × 10 см и различных углов наклона физических клиньев, град: 15, 30, 45, 60 в положении гентри 0°.

Из анализа данных рис. 6, *а* следует, что зависимость погрешности δ_3 от размера поля имеет примерно линейный характер, и ее величина снижается с увеличением размера поля на 0,15 – 0,25 %. Кроме того, для клина с углом 60° погрешность достигает наибольшего значения, так как она определяется эффектами рассеяния на границе поля; в итоге с ростом угла наклона клина погрешность возрастает.

Поведение погрешности δ_4 (рис. 6,*б*) имеет характер, аналогичный зависимости для δ_3, причем с ростом размера поля область плато на карте интенсивности становится более четкой, минимизируются колебания в области пучка, четко определяются границы полутени. При этом погрешность имеет значения от 0,30 до 0,75 %.

Погрешность области порога профиля δ_5 (рис. 6,*в*) наиболее трудна для оценки; кроме того, согласно требованием работы [12], по данной погрешности как параметру принимается максимально возможное допустимое отклоне-

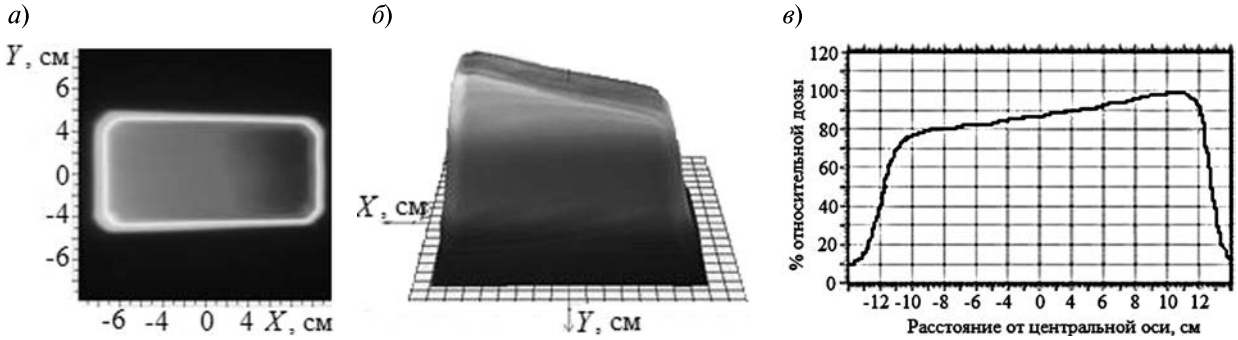


Рис. 7. Распределения поглощенной дозы в двух- (*а*) и трех-(*б*)мерных пространствах и соответствующая им профильная зависимость (*в*) для фотонного пучка с энергией 6 МэВ по данным MatriXX; открытое поле размером 10 × 10 см; угол наклона гентри 60°

ние относительно других погрешностей. Данное требование закономерно, так как с ростом размера поля порог профиля становится менее выраженным и суммарная погрешность увеличивается. По данным измерений диапазон колебаний погрешности составлял от 1,3 до 2,5 %.

На рис. 6, *г, д* представлены правая и левая погрешности верхней части полутени $\delta_{50\text{-}90п}$ и $\delta_{50\text{-}90л}$, соответственно. Характер данных зависимостей идентичен для всех случаев: линейная функция, монотонно убывающая с ростом размера поля. Наибольшее отклонение прослеживается для клина 60° и далее идет его уменьшение вплоть до клина 15°. Суммарное отклонение для левой и правой полутеней находится в пределах 2,7 – 3,2 %.

Согласно картам интенсивности, в рассматриваемой области наблюдается существенное сужение профиля, которое очевидно связано с уменьшением количества детекторов на матрице, действующих для оценки профиля, по мере уменьшения размера поля. В результате оценка оказывается более грубой. В связи с этим возникает вопрос о целесообразности применения матриц для оценки малых размеров полей облучения. Он требует отдельного специального исследования. Наконец, на рис. 6,*е* представлены зависимости параметра RW_{50} от размера поля: его значения лежат в пределах от 0,025 до 0,55 %.

Оценка профильных зависимостей при заданном положении гентри, отличном от 0°. На рис. 7 представлены двух- и трехмерная пространственные зависимости распределения поглощенной дозы, а также профильная зависимость для фотонного пучка с энергией 6 МэВ при размере поля 10 × 10 см и угле наклона гентри 60° в открытом поле.

Для случая, представленного на рис. 7, угол наклона *N* дозного распределения составил 27,7°, поле приобрело трапецеидальную форму с основаниями 8,0 и 10,0 см. При этом общая площадь *P* полученного поля составила 85,5 см^2. Полученное значение радиологической ширины (RW_{50}) – 20,1 см.

На рис. 8 представлены основные зависимости, характеризующие величину поля облучения, от задаваемого угла наклона гентри в

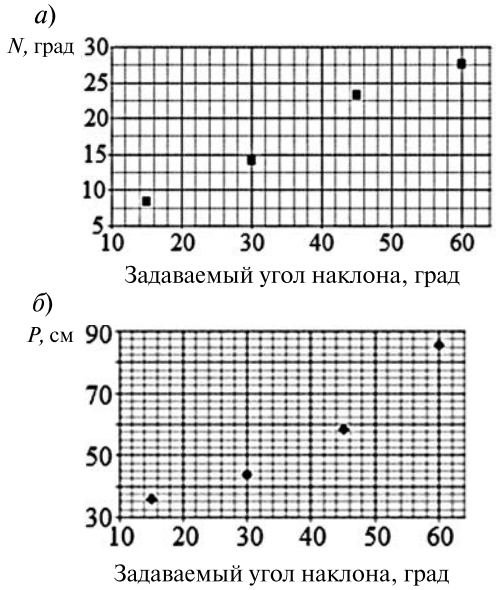


Рис. 8. Зависимости угла наклона дозного распределения (*а*) и выставляемой площади облучения (*б*) от задаваемого угла наклона гентри для фотонных пучков с энергией 6 МэВ; размер поля 10 × 10 см

диапазоне от 15 до 60°. Из рис. 8,*б* следует, что с ростом угла наклона гентри площадь облучения увеличивается экспоненциально, при этом значение P растет от 36,0 до 85,5 см^2. Углы наклона дозного распределения для измеренных положений гентри лежат в пределах от 8,5 до 27,7°.

Таким образом, процедуры оценки геометрических и дозиметрических параметров фотонных пучков мегаэлектронвольтного диапазона энергий в дистанционной лучевой терапии входят в обязательный перечень рассматриваемых параметров при введении в эксплуатацию линейных медицинских ускорителей и являются неотъемлемым этапом при контроле качества их работы в клинических условиях.

В ходе данной работы была проведена оценка геометрических и дозиметрических параметров фотонного пучка с энергией 6 МэВ по данным измерений в водном фантоме Blue Phatom, а также с применением ионизационной детекторной матрицы ImRT MatriXX. Результаты получены для полей с применением физических клиньев с углами наклона 15°, 30°, 45° и 60° и без их применения. Размеры полей составили (см): 5×5, 10×10, 25×25. Кроме того, представлены результаты измерений углов наклона дозного распределения, размера поля и площади поля облучения при положениях гентри 0°, 15°, 30°, 45° и 60° в открытом поле.

Из анализа полученных данных сделан вывод о возможности использования детекторных ионизационных матриц для контроля качества параметров фотонных пучков мегаэлектронвольтного диапазона энергий вместо измерений в водном фантоме. Такая замена позволяет минимизировать временные и материальные затраты на проведение клинической дозиметрии, однако проведение абсолютной дозиметрии при вводе в эксплуатацию оборудования (линейных медицинских ускорителей, станций планирования лучевой терапии и т. п.) рекомендуется все же проводить в водном фантоме.

Применение ионизационных матриц позволяет получать картину интенсивности распределения дозного поля в двух- и трехмерном масштабах; кроме того, использование этих матриц позволяет проводить быстрый и высокоточный анализ полученных зависимостей по сравнению с методами пленочной дозиметрии; полученные картины интенсивности не уступают по точности изображениям, получаемым с помошью портальной визуализации. Кроме того, простота использования данной методики намного выше, чем у ранее рассмотренных методов. Полученные данные позволяют повысить качество планирования дистанционной лучевой терапии: для этого выполняются оптимизационные процедуры с учетом всех выше представленных погрешностей. Они дают возможность определить границы применения методики верификации с помощью матриц. Точность же измерения профильных зависимостей и карт интенсивностей при помощи ионизационных камер, установленных в водном фантоме, согласно работам [11 – 13], составляет менее 1 % от рассчитанной теоретически. В итоге установлено, что наибольшее отклонение матриц – менее 3 %. Полученные значения погрешностей показывают, что суммарная ошибка идентична полученным значениям отклонения от рассчитанных теоретически.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gao, Z.** Using multileaf collimator interleaf leakage to extract absolute spatial information from electronic portal imaging device images [Text] / Z. Gao, J. Szanto, L. Gerig // Appl. Clin. Med. Phys. – 2007. – Vol. 8. – № 1. –P. 1–9.

2. **Миронов, В.О.** Разработка методик контроля качества для многолепесткового коллиматора в дистанционной лучевой терапии [Текст] / В.О. Миронов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2011. – № 4. – С. 94–102.

3. **Sharma, D.S.** Portal dosimetry for pretreatment verification of IMRT plan: A comparison with 2D ion chamber array [Text] /D.S. Sharma, V. Mhatre, M. Heigrujam // Appl. Clin. Med. Phys. – 2010. – Vol. 11. – P. 238–248.

4. **Saminathan, S.** Dosimetric study of 2D ion chamber array matrix for the modern radiotherapy treatment verification [Text] / S. Saminathan, R. Manickan, V. Chandraraj // Appl. Clin. Med. Phys. – 2010. – Vol. 11. – №2. – P. 116–127.

5. **Moreno, R.D.** A method of enhanced spatial resolution of a 2D ion chamber array for quality control of MLC [Text] / R.D. Moreno, D. Venencia, E. Garrigo // Appl. Clin. Med. Phys. – 2011. – Vol. 12. – № 4. – P. 63–73.

6. **Hutzinger, C.J.** Leaf-end configuration for multileaf collimator [Text] / C.J. Hutzinger// United States Patient. – № 5. – 166,531. – Nov. 24. – 1992. – 10 p.

7. **Podgorshak, E.B.** Radiation oncology physics: A handbook for teachers and students [Text] / E.B. Podgorshak. – Vienna: IAEA, 2005. – 639 p.

8. **Gloi, A.M.** Rapid ARC quality assurance through MapCheck [Text] / A.M. Gloi, R.E. Buchanan, C.L. Zuge // Appl. Clin. Med. Phys. – 2011. – Vol. 12. – № 2. – P. 39–47.

9. **Wolfsberger, L.D.** Angular dose dependence of MatriXX TM and its calibration [Text] /L.D. Wolfsberger, M. Wagae, P. Nitsch [et al.] // Jour. of Appl. Clin. Med. Phys. – 2010. – Vol. 11. – № 1. – P. 241–251.

10. ImRT MatriXX. User`s guide [Text] // IBA Dosimetry GmbH, Germany.

11. **Елизарова, М.В.** Оценка погрешности сглаживания дозиметрических данных при инсталляции систем планирования дистанционной лучевой терапии [Текст] /М.В. Елизарова, В.О. Миронов// Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. –2011. – № 1.– С. 82–87.

12. Commissioning and quality assurance of computerized treatment planning systems for radiation treatment of cancer [Text]: TRS-430. – Vienna: IAEA, 2004. – 281 p.

13. Absorbed dose determination in external beam radiotherapy: An international code of practice for dosimetry based on standards of absorbed dose to water [Text]: TRS-398. – Vienna: IAEA, 2004. – 181 p.

14. **Amin, A.E.** Verification of photon beam data calculated by a treatment planning system based on pencil beam model [Text] / A.E. Amin, H.M. Meir // Egypt. Nat. Canc. Inst. – 2001. – Vol. 13. – № 1. – P. 57–62.

15. **Varatharaj, C.** Dosimetric verification of brain and head and neck intensity-modulated radiation therapy treatment using EDR2 films and 2D ion chamber array matrix [Text] / C. Varatharaj, M. Ravikumar, S. Sathiyan// Cancer Res. Ther. – 2010. – Vol. 6. – № 2. – P. 179–184.

УДК: 551.521.07; 535.3

В.В. Елагин, А.Э. Фотиади

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ПРИЗЕМНОГО УЛЬТРАФИОЛЕТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПО ДАННЫМ GOME

За последнее десятилетие проблема возрастания интенсивности ультрафиолетовой радиации, достигающей земной поверхности вследствие истощения озонового слоя земной атмосферы, приобретает все большее значение. Многочисленные исследования показали, что УФ лучи вызывают многие климатологические явления, а также изменения в биосфере, в частности серьезные структурные превращения в живых организмах. Все это обусловило необходимость создания и проведения непрерывного мониторинга приповерхностного солнечного ультрафиолетового излучения.

Из проводимых в настоящее время мероприятий по организации и осуществлению УФ мониторинга земной поверхности можно выделить два основных направления:

создание сети полевых станций наблюдения, которые проводят постоянные спектральные измерения УФ радиации в широком диапазоне спектра. Одна из таких станций расположена в Метеорологической обсерватории (МО) Московского государственного университета;

запуск искусственных спутников Земли с установленной на них специальной аппаратурой, позволяющей непрерывно регистрировать спектры потоков солнечной радиации в атмосфере – как падающих, так и отраженных от земной поверхности.

Основным недостатком первого из этих направлений является относительная «локализованность» точек наблюдения, т. е. невозможность осуществлять одновременный непрерывный УФ мониторинг на большой площади.

Второе направление принципиально лишено этого недостатка, поскольку установленная на спутнике аппаратура способна в течение

нескольких секунд отсканировать земную поверхность площадью в сотни квадратных километров. В рамках международной программы экологического мониторинга, начиная с 1995 года, на ряде метеорологических спутников, запускаемых Европейским космическим агентством, устанавливаются специальные измерительные комплексы GOME (Global Ozone Monitoring Experiment) [1].

Эти комплексы осуществляют непрерывное сканирование приземной атмосферы с целью определения содержащейся в ней концентрации молекул озона O_3, воды, а также концентрации таких газов, как диоксиды азота (NO_2), серы (SO_2), хлора (ClO_2) и оксид брома BrO [2, 3]. Известно, что два последних соединения, активно взаимодействуя с молекулами озона в так называемом галогеновом цикле распада атмосферного озона (образовании озоновых дыр), во многом определяют его концентрацию, а, следовательно, и интенсивность эритемного ультрафиолетового (УФ-В) излучения, проходящего через атмосферу на земную поверхность.

Аппаратура GOME позволяет проводить одновременные измерения энергетических и спектральных параметров падающего и восходящего потоков оптического излучения в широком спектральном диапазоне (от 240 до 790 нм; спектральное разрешение в диапазоне 0,25 – 0,40 мкм составляет 0,2 нм).

После соответствующей обработки первичные данные, получаемые в реальном времени в определенной точке траектории спутника, подразделяют на две группы.

В первую входят спектральные данные (в абсолютной мере) об уровне радиации Солнца, Луны и восходящего излучения;

во вторую – данные о величине зенитного угла, интегральных значениях концентрации молекул озона и других газов в зондируемом атмосферном столбе, информация о типе и плотности облаков, спектральном отражении земной поверхности, а также промежуточные географические и метеорологические данные.

Очевидно, что обработка данных, полученных с помощью измерительной аппаратуры спутника, перевод их в интенсивность и спектральный состав УФ излучения на земной поверхности являются достаточно сложной задачей, поскольку требуют учета множества неоднозначных факторов, таких например, как влияние плотности облачного покрова и альбедо.

В настоящее время существует достаточно большое количество математических моделей, с помощью которых в той или иной мере решается эта задача [4, 5]. Наиболее распространена вследствие своей простоты модель Берда [6]. Несомненным ее достоинством является то, что для ее использования не требуется глубоких знаний физики атмосферы и метеорологии. Это особенно важно для широкого круга пользователей, работающих в смежных областях науки, например экологов, биологов и медиков.

Согласно модели Берда, в которой зондируемая атмосфера рассматривается как однородная среда с усредненными параметрами, плотность потока солнечной радиации на длине волны λ, достигающего земной поверхности, – $H_{\text{пов}\lambda}$ связывается с величиной плотности падающего потока $H_{0\lambda}$ на высоте L атмосферы простым выражением:

$$H_{\text{пов}\lambda} = H_{0\lambda} T_\lambda,$$

где T_λ – спектральная функция ослабления плотности падающего потока $H_{0\lambda}$;

$$T_\lambda = T_{r\lambda} T_{a\lambda} T_{\text{H}_2\text{O}\lambda} T_{u\lambda} T_{\text{O}_3\lambda}. \qquad (1)$$

Величины $T_{r\lambda}; T_{a\lambda}; T_{\text{H}_2\text{O}\lambda}; T_{u\lambda}; T_{\text{O}_3\lambda}$ представляют собой спектральные функции ослабления падающего потока за счет различных процессов, сопровождающих прохождение солнечной радиации через атмосферу. Это прежде всего процессы рэлеевского рассеяния $\left(T_{r\lambda}\right)$ и аэрозольного затухания $\left(T_{a\lambda}\right)$; процессы поглощения радиации молекулами воды $\left(T_{\text{H}_2\text{O}\lambda}\right)$, остаточных газов $\left(T_{u\lambda}\right)$ и озона $\left(T_{\text{O}_3\lambda}\right)$. Конкретный вид каждой из этих функций, зависящий от многих условий, в том числе от зенитного угла, определяющего взаимное расположение спутника и сканируемого участка земной поверхности, выводится в предположении, что зондируемая атмосфера представляет собой однородный столб газа с усредненными параметрами. Несмотря на такую относительную грубость лежащих в ее

основе предположений, полуэмпирическая модель Берда позволяет на основе данных GOME определять «приповерхностный» поток солнечной радиации в спектральном диапазоне от 0,3 до 4,0 мкм с точностью, сравнимой с результатами, полученными на основе более строгих моделей и с использованием для этих целей мощных программных пакетов [6].

Следует, однако, отметить, что относительно высокая точность получаемых с помощью модели Берда результатов достигается в достаточно узком диапазоне изменения концентрации молекул озона и, как правило, для безоблачных дней.

В настоящей работе предпринята попытка расширить возможности применимости модели Берда для определения величины приповерхностного потока биологически активного УФ излучения на основе данных GOME первого и второго уровней, получаемых в широком диапазоне изменения зенитного угла, концентрации молекул озона, а также в присутствии облачности.

На рис. 1 представлены результаты проведенного нами расчета плотности «приповерхностного» потока ультрафиолетовой компоненты солнечной радиации с помощью «классической» модели Берда (кривая *1*) и результаты прямых измерений тех же величин (кривая *2*) с помощью широкополосных ультрафиолетовых пиранометров UVB-1 фирмы Yankee Environmental Systems, Inc. («Янки») [7]. В качестве исходных данных при расчете приземного УФ с помощью модели Берда нами использовался полный пакет данных, полученных комплексом GOME для района Москвы в безоблачные дни в период с 1 апреля по 6 сентября 1999 года. Результаты наземных измерений интенсивности УФ излучения (УФ-А + УФ-В) для тех же дней получены в Метеорологической обсерватории при Московском государственном университете (погрешность измерений при соответствующей калибровке прибора была ниже ± 2 %). Отметим, что полученные в обсерватории результаты – это стандартные величины, усредненные за час по истинному солнечному времени.

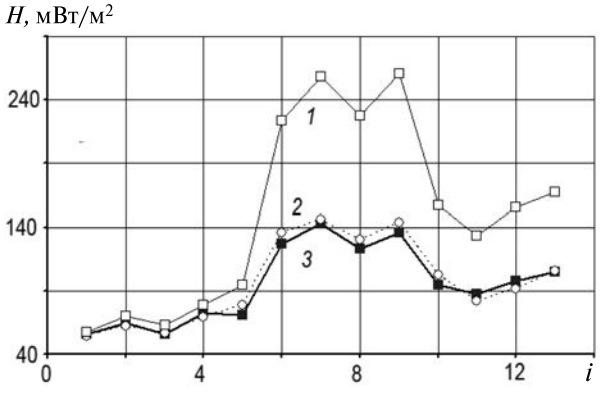


Рис. 1. Сравнение данных приземного УФ, измеренных наземной станцией (*2* – «Янки») и рассчитанных с помощью модели Берда на основании данных GOME (*1*, *3* – без учета и с учетом корреляции соответственно); *i* – порядковые номера безоблачных дней за период 1.04. – 6.09. 1999 года

Анализ результатов показал качественное соответствие кривых (см. рис. 1). Однако относительно хорошее количественное согласие (с точностью около 14 %) результатов расчета и прямых измерений наблюдается только в весенний период (экспериментальные точки при $i = 1 - 5$), в летнее же ($i = 6 - 9$) и осеннее ($i = 10 - 13$) время они различаются весьма существенно (относительная погрешность составляет 80 и 60 % соответственно).

Анализ полного набора данных измерительных комплексов GOME первого и второго уровней, полученных для района Москвы в эти безоблачные дни, показал, что 18 апреля и 2 сентября 1999 года (экспериментальные точки при $i = 4$ и 12) все характеристики атмосферы были практически идентичны.

При этом определяющие факторы, ответственные за ослабление потока (см. выражение (1)), за исключением концентрации озона (381 и 308 DU соответственно, 1 DU = 1 см$^{-3}$), оказались практически одинаковыми. Это обстоятельство позволило нам сделать предположение о том, что причину столь значительного количественного расхождения модельных и экспериментальных данных следует искать в выражении $T_{O_3\lambda}$, определяющим в модели Берда функцию поглощения солнечного излучения атмосферным озоном.

Остановимся на этом, следуя работе [8], несколько подробнее.

Плотность потока монохроматического оптического излучения $H_{\lambda 0}$, прошедшего через слой однородного поглощающего вещества

толщиной l, ослабевает до величины $H_{l\lambda}$, определяемой законом Бугера – Ламберта – Бера:

$$H_{l\lambda} = H_{0\lambda}\exp(-k_\lambda l), \qquad (2)$$

где k_λ – коэффициент, не зависящий от интенсивности света.

Показатель поглощения k_λ в общем виде связан с концентрацией молекул поглощающего вещества N простой зависимостью $k_\lambda = N\chi_\lambda$. Согласно закону Бера, коэффициент поглощения χ_λ не зависит от концентрации поглощающих частиц $\chi_\lambda = \chi_0 P_e(\lambda)$ и характеризует взаимодействие молекул поглощающего вещества со светом длиной волны λ. Функция $P_e(\lambda)$ описывает контур спектральной линии поглощения, а χ_0 – абсолютное значение коэффициента поглощения в центре этой линии. Величина $\chi_\lambda l$ носит название оптической толщины поглощающего слоя.

В работе Берда [6] для определения функции ослабления плотности потока УФ излучения $T_{O_3\lambda}$, обусловленного поглощением озона на длине волны λ, используется именно «классический» закон Бугера:

$$T_{O_3\lambda} = \frac{H_l}{H_0} = \exp(-k_\lambda l). \qquad (3)$$

Аргумент экспоненты в этом выражении (оптическая толщина поглощающего слоя на длине волны λ) записывался, согласно данным работы [9], в виде

$$k_\lambda l = -\alpha_{0\lambda} N_{O_3} M_0,$$

где $\alpha_{0\lambda}$, см$^{-1}$ – десятичный объемный коэффициент поглощения озона;

$$\alpha_{0\lambda} = 2{,}5\chi_\lambda \lg e = 1{,}085\chi_\lambda.$$

Величина $N_{O_3} M_0$, см – толщина однородного слоя озона по направлению луча зрения, определяемая числом молекул озона в слое (в ед. DU); значение N_{O_3}, соответствующее 1 DU, равно $2{,}7\cdot10^{16}$ частиц; M_0 – безразмерный коэффициент, учитывающий влияние зенитного угла на оптическую толщину поглощающего слоя. Выражение для M_0, согласно работе [10], имеет вид

$$M_0 = 35{,}0\Big/\sqrt{1224\cos^2 z} \approx \frac{1}{\cos z}.$$

Однако известно, что закон Бера (независимость χ_λ от N) справедлив только в приближении «тонкого оптического слоя», т. е. когда $\chi_0 l << 1$, что реализуется преимущественно при относительно малых значениях N. При больших значениях концентрации поглощающих частиц величина χ_0 начинает зависеть от N и условие $\chi_0 l << 1$ нарушается. Закон Бугера – Ламберта – Бера в виде (2) уже не справедлив. Учет оптической толщины поглощающего слоя обычно производится путем введения в рассмотрение функции A_G, названной Ладенбургом и Рейхе [11] полным поглощением. Функция A_G определяет относительное уменьшение плотности светового потока вследствие его поглощения на частоте ν, лежащей в частотном диапазоне $\nu_2 - \nu_1 = \Delta\nu$ при прохождении поглощающего слоя с оптической толщиной $\chi(\nu)l$:

$$A_G = \Delta\nu\frac{H_0 - H_l}{H_0} = \int_{\nu_1}^{\nu_2}\left(1 - e^{-\chi(\nu)l}\right)d\nu, \qquad (4)$$

где, как и раньше, H_l, H_0 – плотности прошедшего и падающего потока излучения соответственно; $\chi(\nu) = \chi_0 P(\nu)$ – коэффициент поглощения среды на частоте ν; функция $P(\nu)$, нормированная на единицу, описывает контур спектральной линии поглощения, а коэффициент $\chi_0 = \chi(\nu_0)$ равен абсолютному значению коэффициента поглощения в центре линии. В общем случае χ_0 зависит от концентрации поглощающих частиц.

Когда ширина линии поглощения $\Delta\nu_{\text{лп}}$ много меньше частотного диапазона $\nu_2 - \nu_1 = \Delta\nu$, выражение (4) можно записать в виде

$$A_G = \int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - e^{-\chi(\nu)l}\right)d\nu = \int_{-\infty}^{\infty}(1 - e^{-\chi_0 P(\nu)l})d\nu.$$

Нетрудно видеть, что в этом случае функция ослабления плотности потока УФ излучения $T_{O_3\nu}$, используемая в бердовской модели (3), может быть представлена как

$$T_{O_3\nu} = \frac{H_l}{H_0} = 1 - \frac{A_G}{\Delta\nu} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty}(1 - e^{-\chi_0 P(\nu)l})d\nu. \qquad (5)$$

Выражение (5) позволяет определить полное поглощение среды A_G, а следовательно, и функцию $T_{O_3\nu}$ на частоте ν, если известен вид функции $P(\nu)$, определяющей форму спектральной линии поглощения.

Основное поглощение ультрафиолетовой составляющей солнечной радиации атмосферным озоном в диапазоне длин волн 200 нм < λ < 360 нм происходит в полосе Гартли (200–300 нм) и полосе Хоггенса (280–360 нм). Именно эти полосы ответственны за величины плотности потоков УФ-В и УФ-А излучений, достигающих земную поверхность.

Максимальное поглощение в полосе Гартли достигается на длине волны λ = 252 нм. При этом оптическая толщина озонового слоя на этой длине волны

$$\chi_\lambda l = \chi_0 P(\lambda) = \alpha_{0\lambda} N_{O_3} M_0 = 40$$

при $N = 300$ DU и $M_0 = 1$.

Максимум поглощения в полосе Хюггенса достигается на длине волны λ = 300 нм. Оптическая толщина поглощающего слоя на этой длине волны существенно ниже – всего 2,5.

Спектральную форму контура поглощения $P(\lambda)$ обеих полос (в пренебрежении их тонкой структурой) можно с определенной точностью аппроксимировать Гауссовой кривой с полушириной на половине высоты – $\Delta\lambda_{сл}$, равной 50 нм.

Для Гауссового контура с шириной на полувысоте $\Delta\nu_{сл}$, характеризуемого функцией

$$P(\nu) = \exp\left(-\omega^2\right),$$

где $\omega = C\dfrac{(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu_{сл}}$ (C – некая константа), выражение для A_G записывается в виде [8]:

$$A_G = \frac{\Delta\nu_{сл}}{C}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{1-\exp\left[-\chi_0 l\exp\left(-\omega^2\right)\right]\right\}d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{C}\cdot\Delta\nu_{сл}\cdot\chi_0 l\cdot S(\chi_0 l), \quad (6)$$

где $S(\chi_0 l)$ – функция Ладенбурга – Леви;

$$S(\chi_0 l) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\chi_0 l}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{1-\exp\left[-\chi_0 l\exp\left(-\omega^2\right)\right]\right\}d\omega = \frac{1}{\chi_0 l}\sum_1^{\infty}\frac{(\chi_0 l)^n}{n!\sqrt{n}}. \quad (7)$$

Отметим, что в интервале значений $\chi_0 l$ от нуля до 30 с точностью до нескольких процентов функция Ладенбурга – Леви аппроксимируется следующей простой формулой:

$$S(\chi_0 l) = \exp\left(-0{,}5\sqrt{\chi_0 l}\right).$$

Комбинируя уравнения (5) – (7) и переходя к шкале длин волн, получаем:

$$T_{0\lambda} = (1 - A_G) = w\left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{C}\frac{\Delta\lambda_{сл}\alpha_{0\lambda}N_{O_3}M_0}{\Delta\lambda}S\left(\alpha_{0\lambda}N_{O_3}M_0\right)\right], \quad (8)$$

где w – некий единый постоянный весовой множитель, учитывающий различие между набором расчетных значений интенсивности приземного УФ от соответствующего набора экспериментальных значений тех же величин, полученных с помощью наземной аппаратуры.

Диапазон длин волн $\Delta\lambda = c\dfrac{\Delta\nu}{\nu^2}$ (c – скорость света) выбирался равным области наблюдения, т. е. $\Delta\lambda = 200$ нм [13].

Большой набор экспериментальных данных, относящихся к величине плотности потоков H_l (данные МО), позволил успешно решить обратную задачу с целью определения этого множителя.

Результаты расчетов плотности потока поверхностного УФ излучения, проведенных по данным GOME для безоблачных дней в Москве с использованием функции (8), которая отвечает за поглощение светового сигнала, с учетом оптической толщины поглощающего слоя, приведены на рис. 1 (кривая *3*). Как видно из рисунка, эти результаты находятся в хорошем количественном согласии с данными МО, а именно разброс относительных погрешностей лежит в диапазоне от +6,8 до –8,8 % за весь период наблюдений, при среднем разбросе 0,8 %.

Таким образом, введение в модель Берда функции Ладенбурга – Леви позволяет учесть замедление роста поглощения по мере увеличения оптической плотности поглощающей среды.

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии облаков на интенсивность УФ излучения, падающего на земную поверхность. Допустим, что в ультрафиолетовом диапазоне спектра вся энергия отражается облаками, подобно зеркалу с коэффициентом отражения, пропорциональному их площади. Пусть величины $H^0_{\text{отр}}$ и $H^0_{\text{пр}}$ описывают, соответственно, плотность потока солнечной радиации в безоблачные дни в сторону спутника (условно «отраженного») и плотность потока, направленного в сторону Земли ($H^0_{\text{пр}}$ соответствует H_0 в уравнении (3)). Тогда введение на некой высоте h зеркального слоя приведет к перераспределению этих потоков на величину отраженного излучения ΔH . Это перераспределение можно выразить следующим образом:

$$H_{\text{отр}} = H^0_{\text{отр}} + m_{\text{отр}}\Delta H, \qquad (9)$$

$$H_{\text{пр}} = H^0_{\text{пр}} - m_{\text{пр}}\Delta H, \qquad (10)$$

где $m_{\text{отр}}$ и $m_{\text{пр}}$ – некие передаточные функции атмосферы для отраженного и проходящего потоков, обусловленные рэлеевским и аэрозольным рассеяниями, а также озонным поглощением.

Решая совместно уравнения (9) и (10), получаем выражение для плотности излучения, проходящего вблизи земной поверхности:

$$H_{\text{пр}} = H^0_{\text{пр}}\left\{1 - \frac{m_{\text{пр}}H^0_{\text{отр}}}{m_{\text{отр}}H^0_{\text{пр}}}\left[\frac{(H_{\text{отр}} - H^0_{\text{отр}})}{H^0_{\text{отр}}}\right]\right\} = H^0_{\text{пр}}\left\{1 - g a_{\text{отр}}\right\}.$$

Таким образом, мы видим, что плотность потока УФ излучения в условиях облачности отличается от плотности потока в безоблачные дни множителем $\left\{1 - g a_{\text{отр}}\right\}$. Коэффициент

$$g = (m_{\text{пр}}H^0_{\text{отр}})\big/(m_{\text{отр}}H^0_{\text{пр}})$$

определялся как решение соответствующей обратной задачи для летнего периода при использовании данных МО, а величина $a_{\text{отр}}$, равная

$$a_{\text{отр}} = (H_{\text{отр}} - H^0_{\text{отр}}) / H^0_{\text{отр}},$$

вычислялась на базе данных GOME первого уровня.

Результаты расчета приземного УФ в условиях реальной облачности, проведенного с помощью скорректированной модели Берда, сопоставлялись с данными наземной станции Метеорологической обсерватории, полученными в период с марта по ноябрь 1999 года (рис. 2). Как следует из рисунка, относительное различие между значениями,

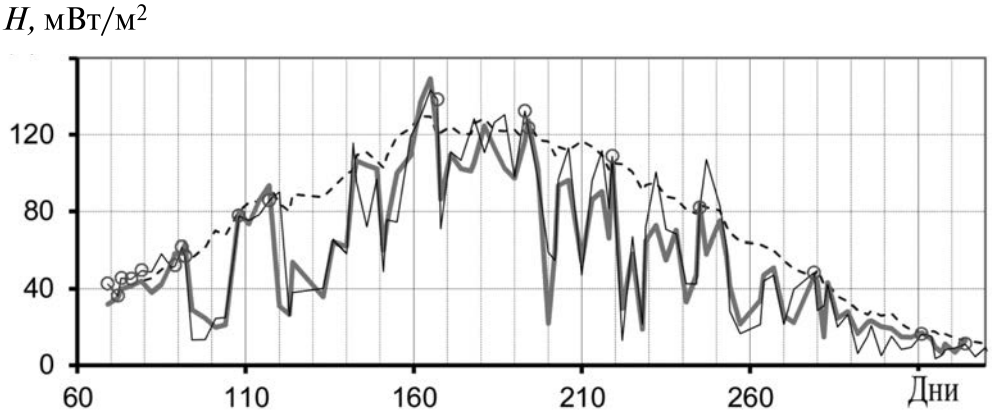


Рис. 2. Результаты сопоставления значений эритемного УФ излучения на поверхности Земли, восстановленных с помощью рассматриваемого метода, с учетом облачности (толстая линия) и без учета (пунктирная линия), с данными наземных измерений на Московской метеорологической обсерватории (тонкая линия) для 1999 года
Кружками обозначены безоблачные дни по данным GOME

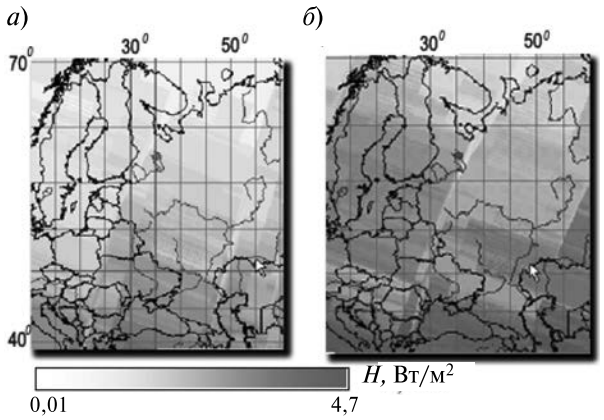


Рис. 3. Примеры распределений потока (по тоновой шкале) эритемного УФ-излучения по европейской части РФ 05.03 (*а*) и 28.07 (*б*) 1999 года, полученных скорректированным методом Берда

восстановленными на основании данных GOME с помощью скорректированной модели Берда, и результатами наземных измерений для 273 дней 1999 года колеблется в пределах ±50 % (со средним значением, не превышающим 10 %). При обсуждении этих результатов следует иметь в виду, что данные, полученные Московской метеорологической обсерваторией, – это стандартные величины, усредненные за час по истинному солнечному времени, а данные GOME представляют собой результаты, усредненные за 1,5 с для площади земной поверхности $S = 40 \times 32$ км.

Скорректированный метод Берда позволяет рассчитывать не только суммарный поток солнечной радиации на поверхность Земли, который обеспечивается с помощью прибора «Янки», но и выделять наиболее биологически активную ее часть – эритемное ультрафиолетовое излучение (УФ-В) (рис. 3).

Таким образом, в работе показано, что предложенная методика коррекции модели Берда значительно расширяет возможности использования модели для определения интенсивности «поверхностного» ультрафиолетового излучения на основе данных GOME первого и второго уровней.

Одним из перспективных направлений использования данной методики является, на наш взгляд, возможность значительного пополнения существующей базы данных по приземному УФ для выявления климатологических и эпидемиологических величин и трендов в региональном масштабе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Product user manual for GOME total columns of ozone, minor trace gases, and cloud properties [Text] – Oberpfaffenhofen: DLR, – 2009. – 43 p.

2. The world data center for remote sensing of the atmosphere [Электронный ресурс]. Режим доступа: http// gome.eumetsat.int; http://wdc.dlr.de/sensors/gome2/.

3. The world data center for remote sensing of the atmosphere [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://wdc.dlr.de/

4. **Chubarova, N.** Comparisons between ground measurements of broadband UV irradiance (300 – 380 nm) and TOMS UV estimates at Moscow for 1979–2000 [Text] / N. Chubarova, A. Yurova, N. Krotkov [et al.] // Optical Engineering. – 2002. – Vol. 41. – No. 12. – P. 3070–3081.

5. **Чубарова, Н.Е.** Ультрафиолетовая радиация у земной поверхности [Текст]: дис... докт. геогр. наук: 25.00.30 / Чубарова Наталья Евгеньевна. – Москва, МГУ. 2007. – 357 с.

6. **Bird, R.E**. A simple, solar spectral model for direct-normal and diffuse horizontal irradiance [Text] / R.E. Bird // Solar Energy. – 1984. – Vol. 32.– No. 4. – P. 461–471.

7. **Чубарова, Н.Е.** Мониторинг биологически активной УФ радиации в Московском регионе [Текст] / Н.Е. Чубарова// Известия РАН. Физика атмосферы и океана. –2002.–Т. 38.–№ 3.–С. 1–12.

8. **Фриш, С.Э.** Определение концентраций нормальных и возбужденных атомов и сил осцилляторов методами испускания и поглощения света [Текст]/ С.Э. Фриш // Спектроскопия газоразрядной плазмы: сб. статей под ред. С.Э. Фриша. – Л.: Наука, 1970.–С. 7 – 62.

9. **Leckne, B.** The spectral distribution of solar radiation at the Earth's surface-elements of a model [Text] / B. Leckne // Solar Energy.–1978.–Vol. 29.– P. 143.

10. **Paltridge, G.W.** Radiative processes in meteorology and climatology [Text] / G.W. Paltridge, C.M. Platt. – New York: Elsevier, 1976. – P. 92.

11. **Ladenburg, R.** Uber selektive absorption [Text] / R. Ladenburg, F. Reiche// Ann. Phys. – 1913. – Vol. 42. – P. 181.

12. **Ladenburg, R.** Kontrollversuche für den Nachweis der negativen Dispersion [Text] / R. Ladenburg, S. Levy // Zs. f. Phys. – 1927. – Vol. 40. – P. 403.

13. **Molina, L.T.** Absolute absorption cross sections of ozone in the 185-to-350-nm wavelength range [Text] / L.T. Molina , M.J. Molina // J. Geophys. Res. – 1986. – Vol. 91. –No. D13. – P. 14501–14508.

УДК 519.237.8; 533.9.082.5; 535.375.55

Н.А. Ушаков, Д. Дориго (D. Dorigo), О.И. Котов, Л.Б. Лиокумович

МЕТОДИКА ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СПЕКТРОВ КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ СОСТОЯНИЯ УГЛЕВОДОРОДНЫХ СМАЗОК НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ ИХ ВЯЗКОСТИ

Тема данной работы связана с дистанционным контролем состояния смазочных масел в различных силовых установках, таких например, как повсеместно внедряемые в Европе ветряные электрогенераторы. Современные конструкции ветряных турбин могут достигать высоты 40-этажных зданий и обычно располагаются на удаленных горных хребтах или даже в океане. При этом, с одной стороны, тяжелые условия эксплуатации, изношенность и загрязненность агрегата могут существенно снизить эффективность работы смазочного материала и значительно сократить срок службы генератора, а также привести к выходу силовой установки из строя. С другой стороны, не только замена масла, но даже взятие его пробы для анализа вызывает значительные трудности. Установка контролирующей аппаратуры на каждый такой генератор представляется экономически неэффективной.

В связи с вышеизложенным становится чрезвычайно актуальной разработка методов дистанционной диагностики состояния смазки, использующих переносное оборудование и не требующих остановки генератора, подъема аппаратуры к агрегату или взятия проб масла.

Известны различные физические методы проверки состояния масла: спектральный анализ, аналитическая феррография и другие [1]. Для дистанционного контроля наиболее привлекателен спектральный анализ, предполагающий регистрацию и изучение спектра обратного рассеяния света в исследуемом масле. При этом для передачи как зондирующих оптических импульсов, так и обратнорассеянного света можно использовать оптоволоконный кабель, исходно смонтированный в конструкции ветряного электрогенератора. Остальная аппаратура, включающая лазерный источник зондирующего излучения, спектрометр, компьютерную систему обработки и анализа полученных данных, может находиться в переносном блоке и подключаться к волоконно-оптическому кабелю в основании каждой отдельно взятой силовой установки для измерения спектра излучения, рассеянного маслом, и анализа его состояния.

Одним из наиболее развитых методов спектрального анализа газов, твердых тел и жидкостей является рамановская спектроскопия. Она представляет собой метод изучения комбинационного рассеяния света, имеющего широкий спектр, который содержит так называемую стоксову компоненту на длинах волн больших, чем длина волны зондирующего излучения λ_0 (связана с поглощением энергии фотонов веществом), а также антистоксову компоненту на длинах волн меньше λ_0 [2]. Комбинационное неупругое рассеяние света чувствительно к характеру колебаний молекул вещества, и спектр рассеяния видоизменяется при изменении свойств молекул или при появлении даже малой концентрации примесей. Ввиду сложности интерпретации исходных спектров и их изменений, анализ состава и состояния веществ обычно ограничивается эмпирическими заключениями.

Для решения указанных проблем требуется использование эмпирических данных для масел с известными параметрами. При этом за основную физическую величину, которая может служить индикатором соответствия состояния масла требуемым условиям, была выбрана его вязкость (она связана с длинами углеродных цепочек молекул и степенью их разветвления [3]). Значительное отклонение вязкости от нормального уровня из-за выработки его ресурса или по другим причинам (как правило, ухудшение состояния масла выражается в существенном

снижении его высокой исходной вязкости) вызвано нарушениями межмолекулярных связей и может быть обнаружено путем анализа спектра комбинационного рассеяния.

Основная цель проведенных исследований – установить возможность определять отклонения вязкости масла от его оптимального состояния по дистанционно измеренным рамановским спектрам; кроме того, при успешном решении проблемы – оценивать по указанным спектрам величину вязкости масла.

В связи с поставленной целью требовалось по сути решить задачу классификации измеряемых данных. Для этого необходим набор экспериментальных спектров комбинационного рассеяния для масел с разной, но известной вязкостью. Итогом обработки массива данных должен быть алгоритм проведения диагностики состояния масла.

Экспериментальные данные и их предварительный анализ

Для решения поставленных задач использовался набор спектров комбинационного рассеяния (их стоксова компонента), снятых для трех видов масел, и в каждом из них по девять образцов с разными значениями вязкости (всего 27 образцов). Для измерений использовалась установка с дистанционной регистрацией (зондирующее и рассеянное излучения распространялись от оптоэлектронной аппаратуры к маслу по волоконно-оптическому кабелю); длина волны зондирующего света составляла 532 нм, диапазон регистрации спектра рассеяния – 530 – 670 нм. Для повышения достоверности измерений каждый спектр регистрировался по 25 раз с 10-секундным усреднением. Таким образом, исходными экспериментальными данными (сигналами) для каждого из трех видов масла служили 225 рамановских спектров, включающих 9 значений вязкости (групп) (по 25 спектров для каждого).

Итак, основной задачей в части обработки и анализа данных был поиск алгоритмов обработки исходных сигналов (рамановских спектров) и получения набора их признаков, позволяющих обеспечить максимальную различимость масел различной вязкости.

Первоначальное изучение набора исходных экспериментальных сигналов показало, что относительно простые подходы, основанные на корреляционном анализе исходных сигналов одной или разных групп, рассмотрении положений характерных подъемов и спадов спектральных зависимостей, особенностей формы спектра и т. п. не позволяют уверенно различать сигналы от разных групп (масел разной вязкости). Не удалась и попытка получать набор признаков с помощью спектрального преобразования исходных сигналов и даже вейвлет-разложений. Главная трудность состояла в том, что изменения в исходных сигналах проявляются только в очень сложных и в то же время слабых осцилляциях формы.

В итоге проблему удалось решить путем применения метода главных компонент (PCA – Principal Component Analysis) [4, 5] и специальных методов подавления помех в исходных сигналах.

Использование разложения Карунена – Лоэва (метода главных компонент)

Метод обеспечивает разложение набора из N исходных сигналов (в цифровом виде они представлены векторами отсчетов), содержащих M отсчетов (векторов $S_n(x_m)$, $n = 1, 2, ..., N$; $m = 1, 2, ..., M$, где n, m – номера сигналов и отсчетов) по N ортогональным компонентам $F_n(x_m)$. В результате применения разложения, по векторам $S_n(x_m)$ вычисляются векторы главных компонент $F_n(x_i)$ и набор коэффициентов C_{nk}, так что исходные сигналы могут быть восстановлены в виде суммирования главных компонент:

$$S_n(x_m) = \sum_{k=1}^{K} F_k(x_m) \cdot C_{nk}. \qquad (1)$$

Таким образом, главные компоненты $F_n(x_m)$ образуют ортогональный и нормированный базис, т. е. сумма по m произведений $F_i(x_m)F_j(x_m)$ обращается в единицу при $i = j$ и в нуль при $i \neq j$. Набор компонент $F_n(x_m)$ является адаптивным и при этом выделяет и ранжирует компоненты как с особенностями, общими для всех исходных сигналов (это главные компоненты с низкими индексами), так и с особенностями, отличающими исходные сигналы друг от друга (это главные компоненты с более высокими индексами). Разложение Карунена – Лоэва ре-

ализуется относительно простыми матричными преобразованиями и становится все более популярным методом обработки данных с самыми разными целями – от агрегации и фильтрации сигналов до использования в задачах различения и классификации, как в данной работе.

Разложение Карунена – Лоэва рассматривает исходные данные в виде матрицы отсчетов S_{nm}. Главные компоненты являются собственными векторами ковариационной матрицы

$$Q = E[(S - ES)(S - ES)^{\mathrm{T}}],$$

где E – оператор вычисления математического ожидания.

Распространенным устойчивым методом нахождения собственных векторов ковариационной матрицы служит метод сингулярного разложения [6], дающий представление матрицы S в виде $S = U \cdot D \cdot C^{*}$, где U – унитарная матрица размера $N \times N$, D – диагональная матрица размера $N \times M$, C – унитарная матрица размера $M \times M$; матрица $F = U \cdot D$ содержит векторы главных компонент в столбцах, а коэффициенты разложения совпадают с элементами матрицы C. Искомое разложение Карунена – Лоэва есть $S = F \cdot C^{\mathrm{T}}$.

В современных математических пакетах (MATLAB и ему подобные) реализована встроенная функция, вычисляющая сингулярное разложение (в надстройке пакета MATLAB Statistics Toolbox реализована функция, непосредственно выполняющая расчет главных компонент).

Далее отметим важный момент, что коэффициент C_{nk} отражает величину «проекции» сигнала $S_n(x_m)$ на компоненту $F_k(x_m)$, т. е. равен скалярному произведению этих векторов:

$$C_{nk} = \sum_{m=1}^{M} S_n(x_m) \cdot F_k(x_m). \qquad (2)$$

Применительно к рассматриваемой задаче коэффициенты C_{nk} можно рассматривать как точки N-мерного декартова пространства признаков (C_{nk} – значение k-ой координаты n-ой точки). Совокупность точек, соответствующих одной группе (маслу с определенной вязкостью), образует группу точек в данном пространстве. Для успешного решения задачи необходимо добиться, чтобы разброс точек одной группы был как можно меньше и группы меньше пересекались, во всяком случае группы, соответствующие «хорошей» вязкости, и группы, соответствующие «непригодной». Если же обеспечить возможность полного разделения и монотонного ранжирования положения групп точек, соответствующих разной вязкости, то фактически это означает возможность оценки величины вязкости. Из самого смысла базисных сигналов $F_n(x_m)$ очевидна целесообразность использования уменьшенной размерности пространства признаков, с отбрасыванием коэффициентов, не несущих информации об изменении вязкости масел.

Разработка алгоритма подавления помех

Несмотря на эффективность анализа особенностей сигналов сложной формы с использованием разложения Карунена – Лоэва, прямое применение разложения к исходным сигналам не дало успешного результата, поскольку в пространстве признаков кластеры точек разных групп исходных сигналов частично пересекались, а точки некоторых кластеров имели значительный разброс. Детальное изучение исходных сигналов одной группы и разных групп, а также главных компонент показало, что проблема связана с наличием значительных паразитных составляющих в исходных сигналах наряду с регулярными и информативными колебаниями. Существенно улучшить результат классификации удалось за счет применения к исходным сигналам дополнительных алгоритмов подавления помех.

Использование распространенных принципов фильтрации помех на основе преобразования Фурье не дало существенных улучшений, поскольку участки сигнала, несущие полезную информацию, локализованы и содержат быстрые осцилляции; как следствие они маскируются шумами и искажаются при частотной фильтрации. В связи с этим возникает необходимость использования более сложных адаптивных методов фильтрации, позволяющих проводить обработку сигнала с большим количеством степеней свободы. Один из таких методов – это вейвлет-фильтрация, на основе которой нами был предложен специализированный эффективный алгоритм обработки исходных сигналов (рамановских спектров).

Общепринятую методику вейвлет-фильтрации можно разделить на следующие этапы:

проведение вейвлет-декомпозиции с получением матрицы амплитуд вейвлетов;

изменение соотношений амплитуд (взвешивание);

восстановление фильтрованного сигнала на основе суммирования вейвлетов с корректированными амплитудами.

Разработанный алгоритм использует жесткое взвешивание, при котором весовой коэффициент может принимать два значения: 0 либо 1, т. е. часть компонент вейвлет-разложения сохраняется в сигнале без изменения, а часть удаляется (интерпретируются как помехи, подлежащие подавлению). Процедура выбора критерия для пропускания или отбрасывания компонент вейвлет-разложения была разработана на основе подробного изучения сходства и различий в исходных сигналах, принадлежащих одной группе, а также учета эффективности конечного результата классификации сигналов.

В итоге был разработан следующий алгоритм фильтрации исходных данных. Вначале для каждого исходного сигнала $S_n(x_m)$ вычисляется матрица так называемых «коэффициентов детализации» вейвлет-разложения W^n_{lm} (матрица амплитуд вейвлетов, из которых складывается сигнал) [7, 8], где n – номер исходного сигнала, m, l – номера коэффициентов детализации по «временной» и «частотной» шкале, причем $l = 1, 2, ..., L$ (L – порядок вейвлет-разложения). Временная шкала вейвлет-разложения соответствует аргументу сигнала x, т. е. в нашем случае шкале длин волн в исходном рамановском спектре. Каждая строка полученной матрицы разбивается на некоторое количество K независимых интервалов для анализа свойств коэффициентов вейвлет-разложения на различных участках сигнала, где k-ый интервал включает точки m от $(k-1)M/K$ до kM/K.

Далее для каждого интервала анализа k и уровня разложения l вычисляется параметр T^n_{lk} выборки коэффициентов разложения этого интервала, используемый далее для определения составляющих разложения, относящихся к неинформативным:

$$T^n_{lk} = \left.\frac{\mathrm{stdev}(W^n_{lm})}{\max(W^n_{lm})}\right|_{m\in[(k-1)M/K;kM/K]}. \qquad (3)$$

Для каждого k-го интервала анализируется характер зависимости величины T^n_{lk} от l, или в другой записи – зависимости $T^n_k(l)$. При выборе критерия фильтрации учитывалось, что уровням разложения меньшего порядка соответствует детализация более быстрых осцилляций сигнала. В зависимости $T^n_k(l)$ для «корректных» целевых колебаний сигналов предполагается монотонное возрастание коэффициентов T в первой половине (при $l < L/2$). В случае, если на этой кривой присутствует локальный максимум, т. е. присутствует уровень l_0, для которого $T^n_k(l_0) > T^n_k(l_0 + 1)$, то это интерпретируется как свидетельство наличия паразитных быстрых осцилляций на данном интервале анализа, и коэффициенты уровней разложения от первого до уровня l_0 на данном интервале k предполагаются соответствующими паразитным составляющим.

Коэффициенты разложения, соответствующие паразитным компонентам сигнала, приравниваются нулю, после чего вычисляется обратное вейвлет-преобразование, т. е. вычисляется фильтрованный сигнал $S'_n(x_m)$.

Предлагаемый алгоритм имеет несколько параметров, определяющих результат его работы. Это, во-первых, используемая при разложении конкретная вейвлет-функция, во-вторых, порядок разложения и, в-третьих, количество интервалов анализа K. В связи с этим описанная процедура фильтрации задает целое семейство алгоритмов. Это, с одной стороны, дает допол-

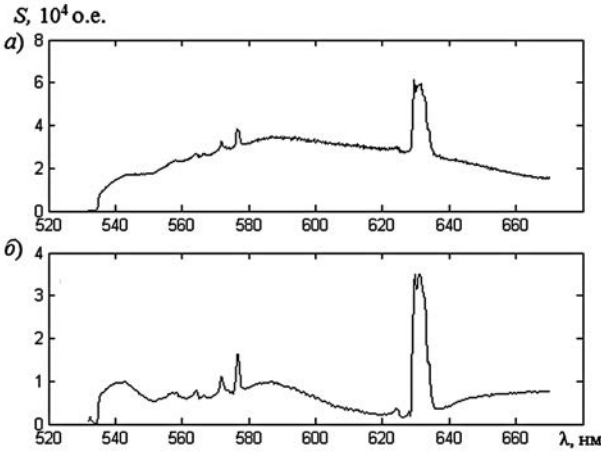


Рис. 1. Сравнение вида исследуемых спектров до (*а*) и после (*б*) фильтрации.
Параметры обработки: симлет 5-го порядка [8], порядок декомпозиции $L = 8$, количество интервалов анализа $K = 15$

нительные возможности адаптации фильтра, но, с другой – подразумевает дополнительное эмпирическое исследование по выбору параметров, обеспечивающих наилучший результат. На рис. 1 показан пример экспериментального рамановского спектра до и после обработки разработанным методом.

Классификация экспериментальных рамановских спектров рассеяния

Как уже отмечалось, коэффициенты C_{nk}, полученные после полного цикла обработки исходных сигналов (подавление помех, затем разложение Карунена – Лоэва), определяли признаки сигналов и рассматривались как координаты точек, соответствующих этим сигналам в N-мерном декартовом пространстве признаков (n – номер точки, k – номер координаты). Результативность использованной обработки (выбора параметров фильтрации и применения метода главных компонент), оценивалась по расположению групп точек, соответствующих группам исходных сигналов. Разделение групп точек в пространстве признаков характеризуется значительными расстояниями между группами и малыми расстояниями между точками одной группы. Формально такие свойства описывались численными значениями таких величин, как эффективные радиусы групп точек, положение центра группы и расстояния между центрами групп. Эти значения рассчитывались на основе обычного геометрического смысла расстояния, обобщенного на многомерное декартово пространство. Однако анализ значений величин C_{nk} и расчеты указанных характеристик показали, что основные показатели различимости групп связаны с очень ограниченным набором коэффициентов, в основном с C_{n3} и C_{n4}. Это обстоятельство соответствует смыслу метода главных компонент. Первая и вторая главные компоненты фактически отражали информацию, присущую в равной степени всем исходным сигналам, из-за чего величины C_{n1} и C_{n2} фактически не зависели от n, т. е. были одинаковы для всех точек и не влияли на различимость групп. С другой стороны, компоненты высоких порядков ($k > 5$) имели значительный разброс, уже никак не коррелированный с номером группы, т. е. высшие главные компоненты давали разный вклад для всех исходных сигналов независимо от группы и опять-таки не влияли на различимость групп.

Значимость только двух компонент разложения существенно облегчала решение задачи. Во-первых, значительно упрощались расчеты и рассмотрение результатов. Во-вторых, посколь-

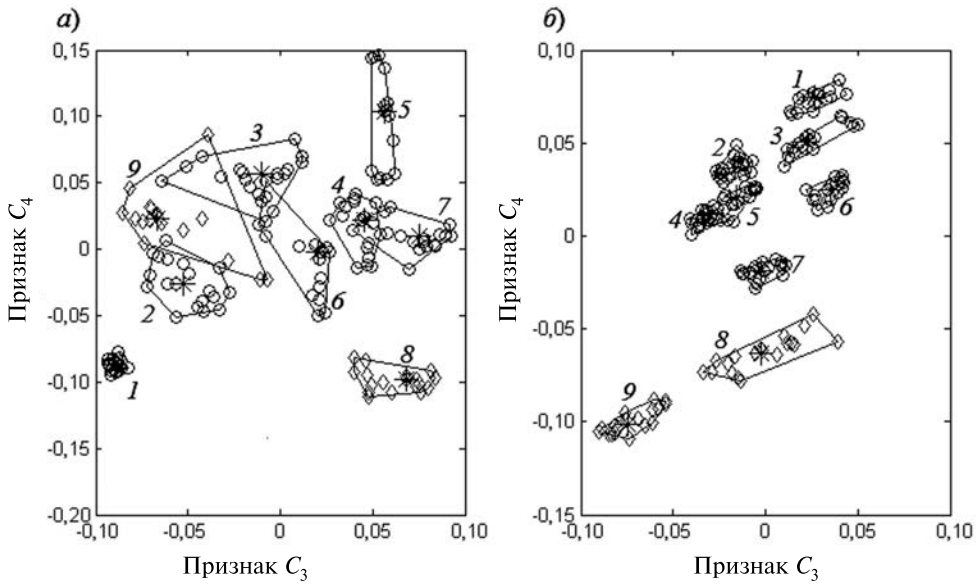


Рис. 2. Сравнение положения точек в пространстве признаков $\{C_{n3}, C_{n4}\}$, соответствующих сигналам $S_n(x_m)$ до (*а*) и $S'_n(x_m)$ после (*б*) обработки предложенным алгоритмом фильтрации

ку фактически анализ положений групп точек в пространстве признаков сводился к двумерному, для снижения громоздкости изложения результатов, вместо таблиц с количественными показателями были приведены наглядные изображения точек, примеры которых показаны на рис. 2. Параметры, использованные при обработке, те же, что и для спектра на рис. 1, *а*. Точки одной группы дополнительно выделены линией границы, центр группы показан звездочкой. Также группам точек присвоены номера от *1* до *9* – возрастание номера соответствует возрастанию вязкости образца масла, для которого получена группа исходных рамановских спектров. Приведенные графики наглядно демонстрируют, что с использованием разложения исходных сигналов $S_n(x_m)$ различимость групп точек является плохой (эта ситуация сохранялась и при попытках применить простые способы фильтрации), а после применения описанного метода подавления помех и разложения сигналов $S'_n(x_m)$ четкость положения групп и их различимость существенно улучшается.

Оценка уровня вязкости и диагностика состояния масла

Решение задачи разделения группы экспериментальных спектров еще не гарантирует успешного решения исходной задачи о диагностике состояния масла с неизвестной вязкостью. Для успешной диагностики необходимо, чтобы имеющиеся группы точек, соответствующие разной вязкости η, не только разделялись как можно лучше, но и чтобы зависимость положения группы от величины вязкости была монотонна. В этом случае положение новых точек при измерениях образцов масла со значениями вязкости, отличными от значений в исходном экспериментальном наборе, будет характеризовать уровень вязкости η.

Это обстоятельство проиллюстрировано. На рис. 2, *а* группы точек расположены достаточно хаотично и не наблюдается соответствия между положением группы и ее номером. На рис. 2, *б* группы не только лучше разделяются, но при росте вязкости положение групп смещается из правого верхнего угла в левый нижний. Более четко эта тенденция выражена в вертикальном смещении, т. е. в изменении коэффициента C_{n4}. Эту связь показывает график зависимости $\Delta C_4(\eta_i)$ на рис. 3, где приведена величина ΔC_4, которая в *i*-ой группе равна разности $\langle C_{n4} \rangle_i - \langle C_{n4} \rangle_1$ (подразумеваются средние значения коэффициентов C_{n4} в *i*-ой группе, соответствующей вязкости η_i). Несмотря на нарушение монотонности в областях перехода между 4-ой, 5-ой, 6-ой группами и 7-ой, 8-ой группами, зависимость показывает возможность уверенно диагностировать переход от высоких значений вязкости ($i = 9, 8, 7$) к средним ($i = 6, 5, 4$) и низким ($i = 3, 2, 1$).

Полученные результаты доказывают возможность диагностирования состояния масла по его вязкости в рамках используемой выше

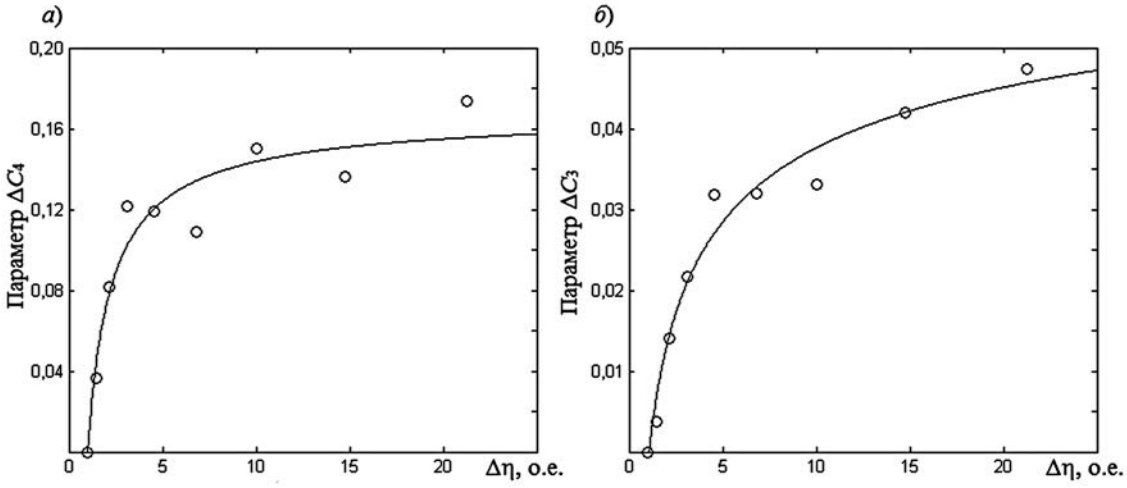


Рис. 3. Связь между отклонением центра кластера в пространстве главных компонент ΔC_4 (*а*) и ΔC_3 (*б*) и относительным изменением вязкости масла

системы обработки рамановских спектров, причем с использованием относительно простого анализа величины амплитуды одной главной компоненты.

Такой вариант метода диагностики можно дополнительно исследовать с целью поиска параметров обработки, обеспечивающих улучшение монотонности зависимости используемого параметра рамановских спектров масла от значения его вязкости. Так, на рис. 3, *б* показана зависимость $\Delta C_3(\eta_i)$, для вычисления которой использовалась третья главная компонента, а обработка исходных сигналов проводилась со следующими параметрами: вейвлет Добеши 4-го порядка [8], 7-й порядок декомпозиции, 15 интервалов анализа. Как видно из рисунка, хотя значения вязкости в области 5–10 о.е. почти не различимы, изменение вязкости в области низких (1–5 о.е.) и высоких (15–25 о.е.) значений может быть уверенно оценено.

Итак, было приведено несколько различных примеров решения проблемы, полученных для одного из трех типов масла, использованных при измерениях «опорных» экспериментальных данных. Для других типов масла результаты диагностики их состояния по величине вязкости были аналогичны, однако для каждого типа возникала необходимость проведения специального подбора параметров обработки рамановских спектров для получения хороших результатов.

Такие методики должны включать подготовительную стадию – получение достаточно большого количества экспериментальных рамановских спектров. По этим данным с использованием разработанной процедуры фильтрации (параметры должны быть оптимизированы) формируется набор главных компонент F_k, которые образуют набор «опорных» функций и из которых целесообразно далее использовать только две или даже одну.

После измерения рамановских спектров $s_j(x_m)$ на тестируемой силовой установке амплитуда используемой компоненты F_k в измеренном j-м сигнале может быть определена скалярным произведением

$$c_{nk} = \sum_{m=1}^{M} s'_n(x_m) \cdot F_k(x_m), \qquad (4)$$

где сигнал $s'_j(x_m)$ – результат фильтрации исходного сигнала $s_j(x_m)$.

Хотя набор «опорных» компонент F, полученный на подготовительной стадии, не будет строго соответствовать ортонормированному базису для вновь измеренных сигналов, однако по физическому смыслу используемых процедур свойства группы получаемых коэффициентов c_{jk} и возможность их использования для оценки уровня вязкости масла будут сохраняться.

Таким образом, рассмотрена проблема дистанционной оценки качества углеводородной смазки в силовых агрегатах с использованием методов оптической рамановской спектроскопии и последующей обработкой спектральных данных.

Показана возможность простого в реализации метода оценки вязкости масла по разработанной процедуре анализа спектров на основе метода главных компонент и вейвлет-фильтрации. На базе экспериментальных данных продемонстрировано получение хорошей различимости масел разной вязкости, подтверждающее корректность выполненных расчетов и справедливость сделанных предположений.

Рассмотренные алгоритмы обработки сигналов и разработанные процедуры расчета могут быть использованы при создании и внедрении практических устройств и методик диагностики реальных энергетических установок (например ветряных турбин) с трудной доступностью для анализа смазочных материалов традиционными методами.

Данное исследование проведено в рамках научного сотрудничества с кафедрой измерительных систем и сенсорной техники Мюнхенского технического университета, которой была предложена данная тематика и проведены все экспериментальные измерения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Протасов, С.И.** Современный инструмент диагностики. Анализ рабочих жидкостей [Текст] / С.И. Протасов // Основные средства. – 2010. – № 3 – С. 251–263.

2. **Пентин, Ю.А.** Основы молекулярной спектроскопии [Текст] / Ю.А. Пентин, Г. М. Курамшина. – М.: Мир, 2008. – 398 с.

3. **Рэмсден, Э.Н.** Начала современной химии [Текст] / Э.Н. Рэмсден. – Л.: Химия, 1989. – 784 с.

4. **Айвазян, С.А.** Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности [Текст] / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.

5. **Gorban, A.** Principal manifolds for data visualization and dimension reduction [Текст] / A. Gorban, B. Kegl, D. Wunsch, [et. al.]. – Berlin, New York: Springer, 2007. – 340 p.

6. **Press, W.H.** Numerical recipes in C [Текст] / W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, [et. al.]. – Cambridge: Cambridge University Press, 1992. – 1018 p.

7. **Малла, С.** Вейвлеты в обработке сигналов [Текст] / С. Малла. – М.: Мир, 2005. – 671 с.

8. **Добеши, И.** Десять лекций по вейвлетам [Текст] / И. Добеши. – М.: Изд-во РХД, 2001. – 464 с.

ФИЗИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

УДК 537.533.9, 621.386.1

А.В. Архипов, Н.В. Дворецкая, Ш. Керн (St. Kern), О.И. Лукша, Г.Г. Соминский

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА ЭЛЕКТРОНОВ, БОМБАРДИРУЮЩИХ ТВЕРДОТЕЛЬНУЮ МИШЕНЬ

Рентгеновское излучение, возникающее при взаимодействии потоков электронов с веществом, широко используется для целей физической диагностики. Например, в широко используемом методе рентгеноспектрального микроанализа [1] полезную информацию о составе облучаемого электронами материала получают путем анализа характеристической составляющей рентгеновского спектра. Тормозную компоненту регистрируемого излучения в процессе обработки данных стараются исключить, поскольку она практически не несет информации о поверхности, бомбардируемой электронами. Нам представляется возможным использовать устройства, традиционно применяемые для рентгеновской диагностики материалов, для другой диагностики – определения характеристик электронных потоков; при этом именно тормозная составляющая излучения оказывается наиболее удобной для использования. Форма ее спектра описывается универсальной формулой Крамерса:

$$N(E) = k\,Z\,[(eU/E) - 1] \qquad (1)$$

и не зависит от материала мишени (его атомный номер Z выступает общим сомножителем для всех энергий электронов). В формуле Крамерса (1) $N(E)$ – спектральная плотность излучения квантов с энергией E; eU – энергия электронов, бомбардирующих мишень; k – постоянный коэффициент.

Именно независимость спектра тормозного излучения от всех параметров, характеризующих систему (кроме энергии электронов), позволяет рассчитывать на возможность определения энергетического распределения электронов в потоке. Наличие характеристической составляющей лишь затрудняет решение этой задачи, поскольку указанная составляющая зависит от элементного состава бомбардируемой поверхности, а этот состав не всегда поддается контролю. Однако если на этой поверхности нет атомов тяжелых элементов с $Z > 60$ (таких как вольфрам или свинец), то спектральный диапазон $E > 40$ кэВ не будет содержать характеристических линий. Поэтому методика восстановления электронного энергетического распределения по спектру тормозного излучения представляется наиболее легко реализуемой для устройств с высокими значениями ускоряющего напряжения U_0, существенно превышающими 40 кВ. В этом случае достаточно широк диапазон энергии квантов (40 кэВ $< E < eU_0$), в котором рентгеновский спектр имеет чисто тормозной характер.

Далее мы приводим краткое описание одного из возможных алгоритмов обработки экспериментальных данных, позволяющего рассчитать энергетическое распределение электронов по виду спектра рентгеновского излучения бомбардируемого коллектора. Кроме того, представлены результаты численных экспериментов, направленных на оценку устойчивости данного метода по отношению к воздействию различных видов погрешностей – как случайных, так и систематических.

Алгоритм обработки рентгеновских спектров

Если спектры рентгеновского излучения моноэнергетического потока электронов известны для всех значений его энергии eU (например, заданы формулой (1)), то распределение электронов по энергиям может быть рассчитано для любого электронного пучка на основании результатов измерения спектра излучения, генерируемого этим пучком. Чтобы выполнить расчет, требуется решить задачу обратного интегрального преобразования, или деконволюции.

Будем искать решение в дискретном виде, полагая, что приходящий на коллектор пучок состоит из групп электронов с энергиями eU_i и парциальными токами $I_i(eU_i)$, которые и требуется найти. Измеренный рентгеновский спектр представляется в виде массива значений спектральной плотности N_j для ряда значений энергии фотонов E_j. Его можно выразить через сумму вкладов моноэнергетических групп электронов:

$$N_j\left(E_j\right) \equiv \sum_i N_{ij} I_i\left(eU_i\right). \qquad (2)$$

Математически базисная матрица N_{ij} задает дискретное представление ядра интегрального преобразования, описывающего сложение рентгеновских спектров моноэнергетических парциальных электронных потоков в общий спектр, доступный для измерения в эксперименте. С точки зрения физического описания процесса каждая строка этой матрицы (базисная функция) $N_{ij}(E_j)$ представляет собой рентгеновский спектр потока электронов с энергией eU_i и единичным током. Для обсуждаемых ниже вычислений мы считали, что регистрируемое в предполагаемых экспериментах рентгеновское излучение будет чисто тормозным, что позволяет определить базисную матрицу в соответствии с формулой Крамерса (1):

$$N_{ij} = k\,Z\,[(eU_i/E_j) - 1] \qquad (3)$$

для всех $eU_i \geq E_j$.

Таким образом, необходимо найти такое энергетическое распределение электронов $I_i(eU_i)$, которое бы позволяло измеренный (или заданный иным образом) спектр рентгеновского излучения $N_j\,(E_j)$ описать наилучшим образом математической моделью, определяемой формулами (2),(3). Задача рассматривается как задача оптимизации с целевой (минимизируемой) функцией, равной сумме квадратов отклонений дискретной модельной функции $N_j(E_j)$ от ее экспериментальных (или заданных) значений. При этом на решение накладывается ограничение $I_i \geq 0$, соответствующее неотрицательности токов парциальных моноэнергетических пучков. Поиск оптимума проводится с использованием программы на языке Паскаль методом координатного спуска по алгоритму золотого сечения. В ходе работы было установлено, что наилучшее (по визуальной оценке результата и времени вычислений) восстановление энергетических спектров электронов достигается при домножении целевой функции на дополнительную весовую функцию E^2. Такая необходимость определяется монотонно падающим характером зависимостей $N(E)$ и $N_{ij}(E_i)$, приводящим к доминированию вклада низкоэнергетической части спектров в суммарную ошибку в отсутствие весовой функции.

Численный эксперимент

Постановка задачи. Для определения степени работоспособности предложенного алгоритма деконволюции спектров тормозного излучения и в целом методики определения энергетических распределений электронов в присутствии случайных и систематических погрешностей измерений был проведен ряд численных экспериментов. Их общая схема была следующей. Задавалось некоторое тестовое распределение электронов по энергиям (в дальнейшем для иллюстрации мы будем приводить результаты, полученные для Гауссова распределения). Для этого распределения рассчитывался спектр рентгеновского излучения. В ходе расчета в спектр вводились погрешности – те или иные отклонения от крамерсовского вида тормозного спектра, определяемого формулами (2), (3). Затем полученный спектр подвергался обратному преобразованию (деконволюции относительно базиса (3)) в электронное распределение в соответствии с описанным выше алгоритмом. Отклонение вида полученного распределения $I_i(eU_i)$ от исходного позволяло оценить степень влияния введенной погрешности на результат восстановления электронно-

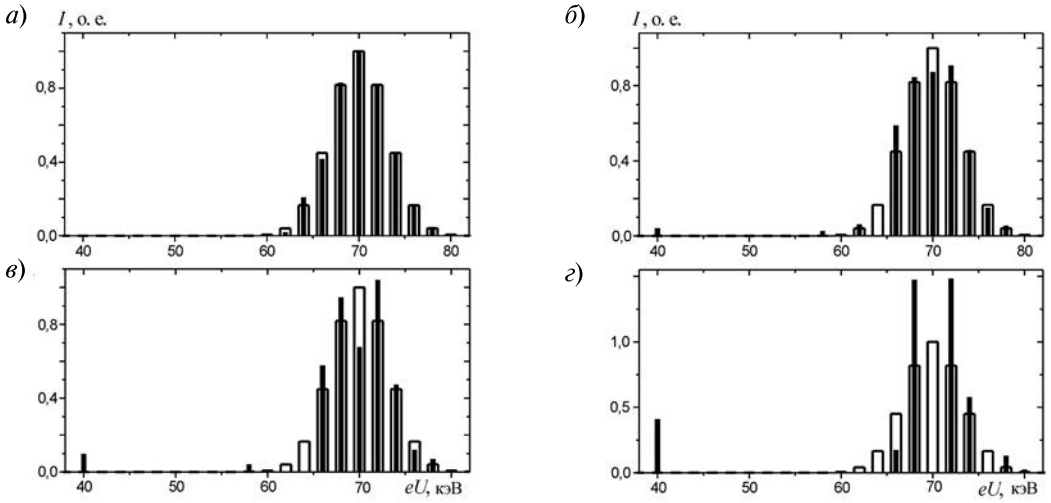


Рис. 1. Пример восстановления электронного энергетического распределения (темные столбцы диаграмм) по рентгеновским спектрам, содержащим статистические шумы, амплитуда которых соответствует числу квантов в выборке n: бесконечно большое (*а*); $2{,}3 \cdot 10^5$ (*б*); $3{,}7 \cdot 10^4$ (*в*); $2{,}3 \cdot 10^3$ (*г*). Исходное электронное распределение показано светлыми столбцами диаграмм

го энергетического распределения. В качестве примера на рис. 1, *а* представлено распределение, восстановленное для «идеальных условий», то есть без введения погрешности. Его близость к исходному распределению подтверждает малую величину вычислительной ошибки, накапливающейся в ходе прямого и обратного интегральных преобразований.

Влияние статистической погрешности. Полное количество квантов, регистрируемых спектрометром при измерении рентгеновского спектра, зачастую бывает ограничено, например, длительностью импульса тока диагностируемого устройства и/или быстродействием спектрометра. В этом случае получаемые спектры могут содержать статистическую погрешность, которая способна привести к ошибке при расчете энергетического спектра электронов. Мы моделировали это влияние, добавляя к спектрам, вычисленным по формуле (2), величину, выбираемую генератором случайных чисел из интервала [–1, 1], домноженную на $\sqrt{N_j}$. Таким образом, относительная величина статистической погрешности уменьшалась с ростом «полного числа квантов n» в построенном рентгеновском спектре. Результаты деконволюции таких спектров представлены на рис. 1, *б–г*. Как видно из приведенных графиков, восстановленные электронные распределения оказываются почти неискаженными при n порядка 10^5 (см. рис. 1, *б*) и «рассыпаются», когда полное число квантов составляет несколько тысяч (см. рис. 1, *г*). Для многих современных спектрометров максимальная скорость счета фотонов ограничена величиной порядка 10^5 $с^{-1}$, что определяет минимально необходимое время измерений – порядка 1 с.

Влияние неточности формулы Крамерса. Будучи универсальной и удобной в использовании, формула Крамерса дает лишь приближенное описание формы спектров тормозного излучения. Уточненные эмпирические формулы предлагались многими авторами (см. например [2–6]), к сожалению, лишь для энергетического диапазона $E < 20$ кэВ. Чтобы установить, насколько существенно неточность формулы Крамерса может повлиять на результаты предложенной диагностики, мы вычисляли спектр тормозного излучения для электронного пучка с Гауссовым энергетическим распределением по предлагаемым в указанных работах формулам, а затем реконструировали электронное распределение, используя базис, задаваемый формулой Крамерса (3). Некоторые результаты таких расчетов приведены на рис. 2. Можно констатировать, что обсуждаемые отклонения реальных спектров тормозного излучения от формулы Крамерса не настолько велики, чтобы препятствовать восстановлению энергетического распределения электронов. Искажения,

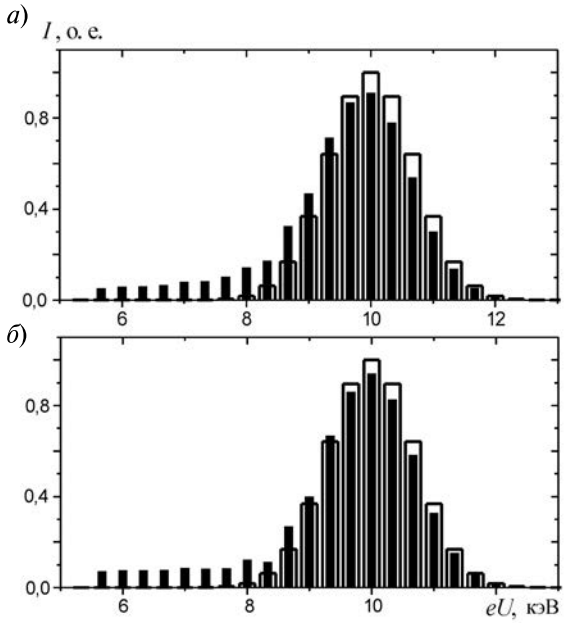


Рис. 2. Электронные энергетические распределения (темные столбцы диаграмм), восстановленные из рентгеновских спектров, рассчитанных в соответствии с эмпирическими формулами из работ [3] (*а*) и [6] (*б*).

В процессе деконволюции использовалась формула Крамерса (3). Величина несовпадения восстановленных распределений с исходными (светлые столбцы) дает оценку вклада неточности формулы Крамерса в общую погрешность предлагаемого диагностического метода

появляющиеся в связи с неточностью этой формулы, могут быть выявлены и минимизированы при обработке экспериментальных данных.

Влияние поглощения рентгеновского излучения. Как известно, поглощение рентгеновского излучения в материалах описывается простой формулой:

$$N(E) = N_0(E)\exp[-\tau(E)\cdot d], \qquad (4)$$

где $N_0(E)$, $N(E)$ – потоки излучения с энергией кванта E на передней и задней границах поглощающего слоя толщиной d.

Постоянная поглощения $\tau(E)$ выражается через массовые плотности атомов всех элементов (Z):

$$\tau(E) = \sum_z \mu_z(E)\rho_z . \qquad (5)$$

Функция $\mu_z(E)$ называется массовым коэффициентом поглощения и известна для всех элементов.

Таким образом, прохождение тормозного излучения через слои поглощающих материалов (например стенку электронно-лучевого прибора) не только снижает его полную интенсивность, но и изменяет спектральное распределение. При известных характеристиках поглощающего материала (элементный состав, плотность и толщина) это изменение может быть скорректировано при обработке данных. Однако, если характеристики поглощения трудно точно определить (например, из-за неопределенности пространственного положения источников излучения), то такая погрешность может существенно искажать вид восстановленного энергетического распределения электронов. Численные эксперименты показали, что при измерении спектра тормозного излучения сквозь медную ($Z = 29$) или железную ($Z = 26$) стенку даже 0,1 мм погрешности в задании ее толщины кардинально изменяет результат восстановления энергетического распределения электронов (рис. 3,*а*); это, по-видимому, делает невозможным его корректное определение. Влияние преград на пути тормозного рентгеновского излучения минимально при выводе излучения через слои материалов с достаточно низким атомным номером, для которых зависимость поглощения от энергии кванта не столь сильна. Например, для алмазного ($Z = 6$) окна толщиной 2,5 мм даже полное пренебрежение поглощением не приводит к заметному изменению вида рассчитанного энергетического распределения электронного пучка (рис. 3,*б*). Поглощение излучения в алюмооксидной керамике, часто используемой в электронных приборах, оказывает заметное воздействие на спектр прошедшего излучения, однако этот эффект можно учесть в практических расчетах, поскольку даже ошибка порядка 1 мм в определении толщины керамики не оказывает существенного влияния на результаты восстановления энергетического спектра электронов (рис. 3,*в*).

Еще одним явлением, искажающим форму спектров рентгеновского излучения, может быть его частичное поглощение в материале коллектора, бомбардируемого электронами. Это явление связано с тем, что преобразование кинетической энергии электронов в энергию

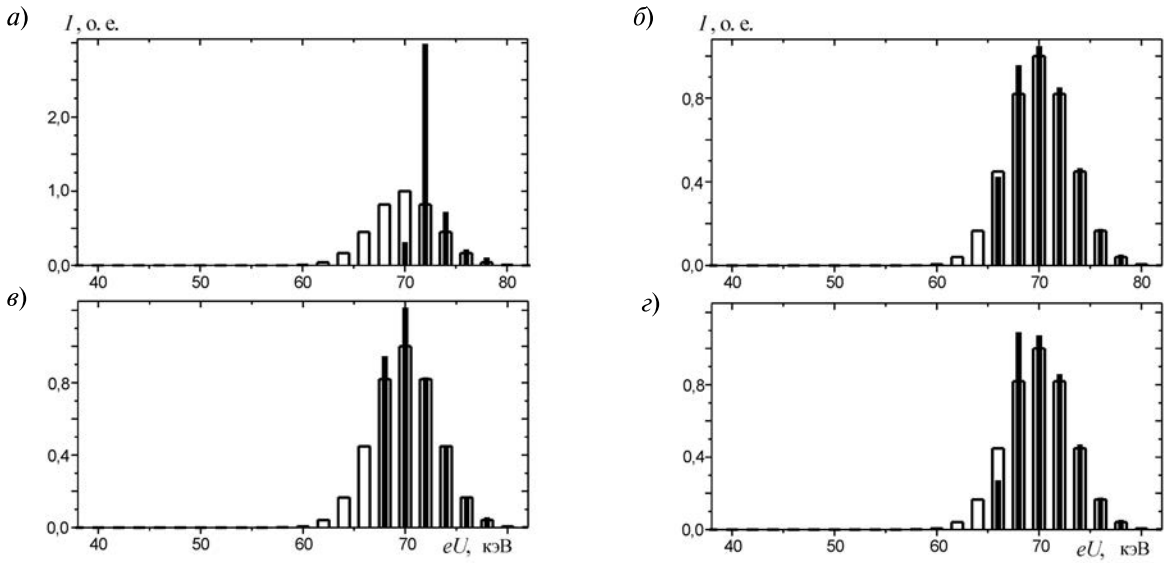


Рис. 3. Электронные энергетические распределения (темные столбцы), восстановленные из рентгеновских спектров, в которые были введены искажения, соответствующие неучтенному поглощению рентгеновского излучения в слоях материалов: 0,1 мм меди (*а*); 2,5 мм алмаза (*б*); 1 мм керамики Al_2O_3 (*в*); в самом медном коллекторе при φ=90°, ψ=20° (*г*).
Светлые столбцы диаграмм показывают исходное электронное распределение

излучения происходит в слое вещества, имеющем конечную толщину и потому не вполне прозрачном для рентгеновских лучей. Согласно работе [7], ослабление потока излучения с энергией E в этом слое может быть описано формулой

$$N(E) = N_0(E)\exp\left(-\tau(E)R\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\right), \qquad (6)$$

где φ – угол падения электронов на коллектор (измеренный относительно его поверхности); ψ – угол отбора (регистрации) излучения; R, м – эффективная глубина генерации рентгеновских квантов, выражаемая эмпирическим соотношением [7]:

$$R = 6{,}4\cdot10^{-5}\frac{(eU)^{1{,}68} - E^{1{,}68}}{\rho} \qquad (7)$$

(ρ, кг/м^3 – плотность материала коллектора; энергии E, eU выражены в кэВ).

В электронно-пучковых устройствах с магнитным удержанием углы падения электронов на коллектор (φ) могут иметь разброс, и их распределение по углам зачастую не удается предсказать с достаточной точностью. Отсутствие такой информации может затруднить учет влияния поглощения излучения в коллекторе на спектр. Для оценки возможного воздействия этого явления на качество реконструкции электронных распределений по рентгеновскому спектру был проведен специальный численный эксперимент. Спектр излучения, вычисленный по формулам (2), (3), был скорректирован в соответствии с формулами (6), (7). В качестве материала коллектора была выбрана медь. Угловые величины были выбраны таким образом, чтобы эффект поглощения в коллекторе был наибольшим: падение электронов по нормали φ = 90° (что обеспечило максимальную глубину их проникновения), регистрация излучения под скользящим углом ψ = 20°. При восстановлении электронного энергетического распределения по рентгеновскому спектру, полученному таким образом, игнорировалось явление внутреннего поглощения. Как видно из графика на рис. 3,*г*, это не оказало сильного влияния на результат деконволюции спектра даже при таком, самом неблагоприятном выборе углов φ и ψ. Следовательно, поглощение излучения в коллекторе можно не учитывать и при других углах падения электронов. Заметим, что при выборе более тяжелого материала коллектора (например вольфрама) пренебрегать внутренним поглощением излучения уже нельзя, однако такие материалы,

как правило, не используются при создании коллекторов электронно-пучковых устройств (за исключением рентгеновских трубок).

Другие источники погрешностей. Таким образом, проведенные численные эксперименты подтвердили принципиальную возможность восстановления энергетического распределения электронов по спектру тормозного излучения. Действие всех рассмотренных выше факторов на спектры может быть сделано либо несущественным при правильном выборе условий эксперимента (время экспозиции, материалы коллектора и диагностического окна и т. п.), либо учтено в расчетах. Однако могут существовать и иные источники погрешностей определения спектров, вклад которых не поддается количественной оценке без дополнительной конкретной информации об условиях измерений. К таким источникам погрешностей можно отнести следующие:

неидеальность характеристик спектрометра, проявляющаяся как в конечной величине энергетического разрешения, так и в зависимости чувствительности от энергии фотона;

рассеяние рентгеновского излучения в материале диагностического окна. Простые оценки показывают, что при энергии электронов 100 кэВ и толщине керамического окна 10 мм вклад фотонов, неупруго рассеянных в этом окне, в общем потоке излучения может превосходить 10 %; это может заметно влиять на форму рентгеновского спектра. Точный расчет вклада рассеянных фотонов затруднен тем, что направление их движения в момент рассеяния изменяется. В результате на вход спектрометра попадут не только фотоны, рожденные на пересечении «линии зрения» спектрометра с поверхностью коллектора, но и фотоны с других участков коллектора, рассеянные в окне;

вторичная электронная эмиссия. Все формулы, описывающие вид спектров тормозного излучения, получены при условии полного поглощения энергии электронов в коллекторе. Если часть энергии уносится вторичными электронами, то форма спектра тормозного излучения может претерпеть изменения.

Действие перечисленных факторов способно усложнить восстановление электронных энергетических распределений на основании спектров тормозного излучения. Их влияние можно выяснить путем дополнительного анализа.

Таким образом, в рамках представленной работы проведено численное тестирование методики расчета энергетического распределения электронов, бомбардирующих коллектор, на основе данных о спектре генерируемого ими тормозного излучения. Продемонстрирована принципиальная работоспособность данной методики при выполнении ряда условий, основным из которых является возможность регистрации чисто тормозного рентгеновского спектра в достаточно широком интервале энергий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Технологического института Карлсруэ (Германия), а также Министерства образования и науки Российской Федерации (грант № 11.G34.31.0041) и РФФИ (грант № 11-02-01442).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Конников, С.Г.** Электронно-зондовые методы исследования полупроводниковых материалов и приборов [Текст] / С.Г. Конников, А.Ф. Сидоров. – М. : Энергия, 1978. – 136 с.

2. **Small, J.** Modeling of bremsstrahlung radiation produced in pure-element targets by 10–40 keV electrons [Текст] / J. Small, S. Leigh, D. Newbury, R. Myklebust // J. Appl. Phys. – 1987.– Vol. 61.– P. 459–469.

3. **Rao-Sahib, T.** The X-ray continuum from thick targets [Текст] / T. Rao-Sahib, D. Wittry // Proc. 6th Intern. Conf. on X-ray Optics and Microanalysis (Osaka, Japan, I971).– I972.– P. 131–137.

4. **Smith, D.G.W.** The atomic number dependence of the X-ray continuum intensity and the practical calculation of background in energy dispersive electron microprobe analysis [Текст] / D.G.W. Smith, C.M. Gold, D.A. Tomlinson // X-ray Spectrom.– 1975.– Vol. 4.– P. 149–156.

5. **Trincavelli, J.** Model for the bremsstrahlung spectrum in EPMA. Application to standardless quantification [Текст] / J. Trincavelli, G. Castellano, J. Riveros. // X-ray Spectrom.– 1998.– Vol. 27.– P. 81–86.

6. **Castellano, G.** Analytical model for the bremsstrahlung spectrum in the 0.25–20 keV photon energy range [Текст] / G. Castellano, J. Osan, J. Trincavelli // Spectrochimica Acta B.– 2004.– Vol. 59.– P. 313–319.

7. **Andersen, C.A.** The electron microprobe [Текст] / C.A. Andersen. – London: John Wiley & Sons, 1966. – P. 62.

УДК 537.533.2

А.В. Архипов, С.И. Крель

ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ОБЛЕГЧЕННОЙ ПОЛЕВОЙ ЭМИССИИ ЭЛЕКТРОНОВ ИЗ НАНОМАТЕРИАЛОВ

Характеристики полевой эмиссии электронов многих наноструктурированных материалов не находят объяснения в рамках теории Фаулера – Нордгейма. Среди прочих такое поведение характерно для наноматериалов на основе углерода, значения работы выхода для большинства видов которого достаточно велики (превышают 4,5 эВ). В случае углеродных нанотрубок высокая эмиссионная способность достигается в результате фокусировки электрического поля на локальных участках, в частности на торцевых поверхностях. Однако зачастую способность к эффективной полевой эмиссии демонстрируют и такие углеродные материалы [1–5], морфология поверхности которых заведомо не способна обеспечить значения коэффициента усиления поля, достаточные для описания наблюдаемых токовых характеристик в рамках классической теории. Одно из возможных объяснений облегченной эмиссии из таких материалов может состоять в реализации для них двухступенчатого механизма переноса электронов в вакуум через промежуточные состояния, локализованные вблизи поверхности и незаполненные в отсутствие электрического поля [3, 8–10]. При проникновении поля в поверхностный слой эмиттера создаются условия для заполнения этих состояний. Если высота потенциального барьера, отделяющего их от вакуума, существенно меньше «объемного» значения работы выхода, то вклад электронов с промежуточных состояний может доминировать в полном токе эмиссии. При этом следует признать, что современный уровень знаний об эмиссионных центрах «гладких» гетерогенных углеродных пленок остается недостаточным для однозначной привязки промежуточных состояний к определенным элементам их структуры. Поэтому представляемые ниже численные эксперименты основывались на весьма обобщенной модели двухступенчатого эмиссионного механизма. Построение такой модели не требует детального знания конкретных свойств материала эмиттера. Первоочередной задачей моделирования являлась демонстрация принципиальной возможности объяснения экспериментально наблюдавшихся особенностей эмиссии углеродных материалов действием двухступенчатого механизма переноса электронов в вакуум. В рамках данной работы рассмотрение ограничено случаем статического электрического поля.

Численная модель двухступенчатого эмиссионного механизма

Рассмотрим двухступенчатый механизм полевой эмиссии на примере максимально упрощенной численной модели, описывающей в обобщенном виде туннельные переходы электронов между энергетическими состояниями нескольких пространственно разделенных областей вблизи эмиссионной границы. Пусть одна из этих областей представляет собой объем эмиттера; относящиеся к ней величины будем обозначать индексом «0». Индексом «1» будем идентифицировать величины, относящиеся к некоторой пространственно ограниченной области вблизи поверхности, содержащей локальные электронные состояния. В реальном эмиттере им могут соответствовать, например, электронные уровни нанокристаллита, находящегося на поверхности. Для обеих пространственных областей ($k = 0, 1$) зададим энергетические распределения плотности разрешенных электронных состояний в виде столбцов (одномерных массивов) вещественных чисел $f_k[e]$. Номер элемента массива e соответствует номеру интервала значений энергии, отсчитываемых «вниз» от нулевого уровня, совпадающего с энергией электрона в вакууме в отсутствие внешнего поля (рис. 1, *а*). Количества электронов, заполняющих разрешенные состояния, зададим столбцами $q_k[e]$, на элементы которых наложим естественное ограничение

$$0 \le q_k[e] \le f_k\,[e].$$

Для объема эмиттера (область «0») постулируем отсутствие влияния электрического поля на энергетическую структуру состояний и степень их заполнения; это означает постоянство столбцов $f_0[e]$ и $q_0[e]$ в процессе вычислений. В большинстве случаев будем задавать их простейшим образом, в виде ступенчатых распределений:

$$f_0[e] = \begin{cases} 0, & \text{если } e < e_V; \\ f_0, & \text{если } e \ge e_V; \end{cases} \qquad (1)$$

$$q_0[e] = \begin{cases} 0, & \text{если } e < e_{\mathrm{F}}; \\ f_0[e], & \text{если } e \ge e_{\mathrm{F}}, \end{cases} \qquad (2)$$

где f_0, e_V, e_{F} – положительные постоянные; величина e_V определяет энергетическое положение верхней границы валентной зоны разрешенных состояний, а e_{F} – положение уровня Ферми, отделяющего свободные объемные состояния от заполненных.

Легко видеть, что, варьируя соотношение между величинами e_V и e_{F}, можно моделировать энергетическую структуру материалов с металлическим (при $e_{\mathrm{F}} > e_V$), дырочным ($e_{\mathrm{F}} > e_V$, но близкó к нему) либо собственным полупроводниковым ($e_{\mathrm{F}} \le e_V$) типами проводимости. Необходимость исследования всех этих случаев определяется разнообразием свойств различных форм наноуглерода [1, 4, 11, 12].

Электронные свойства пространственной области «1» в представляемой модели также можно варьировать. На рис. 1, *а* показан один из исследованных нами вариантов, для которого спектр разрешенных состояний имеет вид зоны, ограниченной лишь снизу, с равномерным распределением энергетической плотности:

$$f_1[e] = \begin{cases} f_1, & \text{если } e \le e_S; \\ 0, & \text{если } e > e_S. \end{cases} \qquad (3)$$

Постоянную e_S будем выбирать в соответствии с условием $e_S < e_{\mathrm{F}}$. Тогда в отсутствие электрического поля все разрешенные состояния области «1» окажутся выше уровня Ферми и потому будут вакантны: $q_1[e] = 0$ (см. рис. 1, *а*).

Будем считать, что потенциал объема эмиттера всегда остается нулевым, тогда как потенциал области «1» (φ_1) изменяется как под

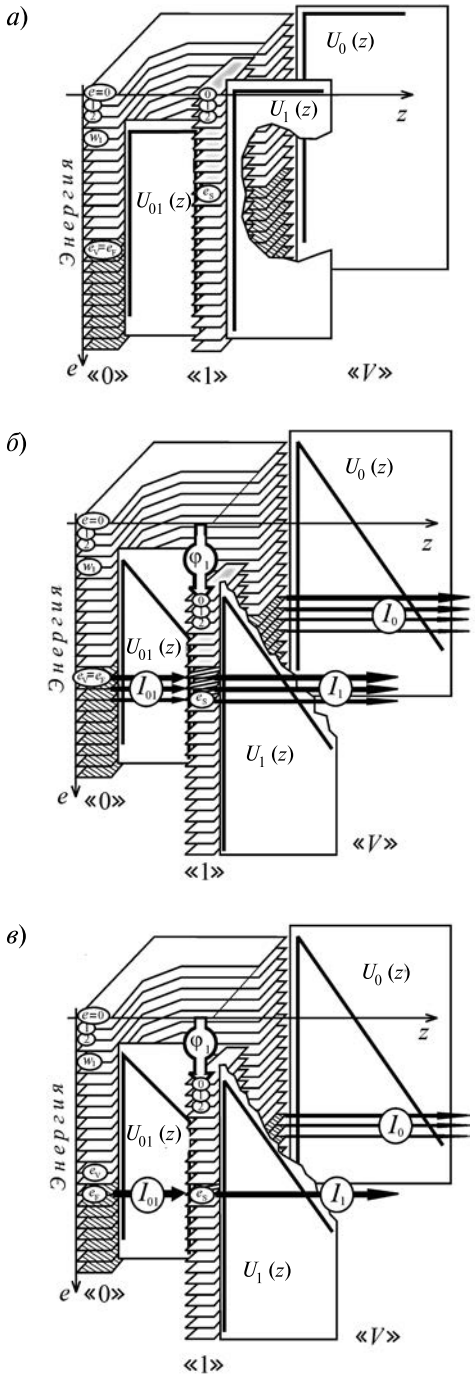


Рис. 1. Графическое представление численной модели двухступенчатого процесса эмиссии электронов из материалов с металлической (*а*, *б*) и дырочной (*в*) проводимостью. Состояние системы показано в отсутствие (*а*) и при приложении (*б*, *в*) внешнего поля. Разрешенные, запрещенные и заполненные энергетические уровни изображены в виде темных, светлых и заштрихованных пластин соответственно; «0», «1» – объемные и локализованные поверхностные состояния, «*V*» – состояния вакуума

действием приложенного извне поля F, так и в результате накопления поверхностного заряда $q_1 = \sum_e q_1[e]$ в соответствии со следующей формулой:

$$\varphi_1 = F - q_1 / C_1, \quad (4)$$

где C_1 – константа, имеющая смысл электрической емкости.

Влияние потенциала на энергию электронов будем моделировать посредством введения сдвига столбцов $f_1[e]$ и $q_1[e]$ на величину φ_1, то есть замены номера каждого их элемента $[e]$ на округленное до целого значение $[e-\varphi_1]$ (см. рис. 1, *а*, *б*).

Рис. 1,*в* иллюстрирует другой возможный вариант энергетической структуры эмиссионного центра, качественно рассмотренный в работе [13]. В этом случае предполагается, что объем эмиттера имеет свойства дырочного полупроводника, а спектр состояний поверхностной области, участвующих в эмиссионном процессе, представлен единственным разрешенным уровнем e_S.

В предлагаемой модели заполнение электронных состояний области «1» происходит в результате протекания тока из объема эмиттера. На данном этапе в качестве единственного механизма переноса электронов будем рассматривать туннельные переходы между состояниями с одинаковой энергией. Полный ток таких переходов I_{01} складывается из компонентов $I_{01}[e]$, определяемых переходами внутри отдельных энергетических диапазонов e:

$$I_{01}[e] = S_{01}T_{01}[e]\times \\ \times\left(q_0[e]f_1[e-\varphi_1] - q_1[e-\varphi_1]f_0[e]\right), \quad (5)$$

где S_{01} – константа; $T_{01}[e]$ – прозрачность барьера для электронов с энергией e. Сомножитель в скобках задает разность вероятностей переходов из области «0» в область «1» (с учетом изменения потенциала последней) и в обратном направлении.

При вычислении прозрачности барьера для простоты полагаем, что при изменении потенциала φ_1 барьер остается прямоугольным (как это сделано, например, в работе [7]), но его высота понижается на $\varphi_1/2$. Получаем выражение для прозрачности барьера:

$$T_{01}[e] = \exp\left(-D_{01}\cdot\left[e-(w_1-\varphi_1/2)\right]^{1/2}\right), \quad (6)$$

где D_{01} – константа, пропорциональная ширине барьера, w_1 – энергетическое положение вершины барьера в отсутствие поля.

Будем учитывать возможность перехода электронов в вакуум из обеих рассматриваемых областей. Для тока прямой эмиссии электронов с объемных состояний, имеющих энергию e, можно записать:

$$I_0[e] = S_0T_0[e]\cdot q_0[e], \quad (7)$$

где S_0 – постоянная величина, $T_0[e]$ – прозрачность поверхностного барьера.

Аналогично для эмиссии из состояний области «1» (с учетом их сдвига под действием поля) выражение для тока имеет вид

$$I_1[e] = S_1T_1[e]\cdot q_1[e-\varphi_1]. \quad (8)$$

Полные токи эмиссии с объемных и поверхностных состояний всех энергий I_0 и I_1 вычисляются суммированием элементов массивов $I_0[e]$ и $I_1[e]$ соответственно; общий эмиссионный ток есть их сумма: $I = I_0 + I_1$.

При вычислении прозрачности поверхностных барьеров будем считать их форму треугольной. Тогда, сделав некоторые дополнительные упрощающие предположения и адаптируя использованные в статье [7] формулы к обозначениям нашей дискретной модели, можно записать для коэффициентов прозрачности по отношению к электронам энергии e:

$$T_0[e] = \exp\left(-\frac{(e-e_0)^{3/2}}{\beta_0 F}\right); \quad (9)$$

$$T_1[e] = \exp\left(-\frac{(e-e_1-\varphi_1)^{3/2}}{\beta_1 F}\right), \quad (10)$$

где постоянные β_0 и β_1 соответствуют значениям коэффициента усиления поля для эмитирующих участков областей 0 и 1; e_0 и e_1 – положение вершины поверхностного барьера для электронов этих областей в отсутствие поля.

Формула (10) базируется на предположении, что энергетическое положение вершины барьера для электронов промежуточных состояний $(e_1+\varphi_1)$ изменяется вместе с изменением энергии самих этих состояний.

Если считать, что положение вершин барьеров в отсутствие поля совпадает с уровнем вакуума ($e_1 = e_0 = 0$), то формулы (9), (10) дополнительно упрощаются:

$$T_0[e] = \exp\left(-\frac{e^{3/2}}{\beta_0 F}\right); \qquad (9a)$$

$$T_1[e] = \exp\left(-\frac{(e-\varphi_1)^{3/2}}{\beta_1 F}\right). \qquad (10a)$$

Определенная описанным образом модель дополняется уравнением, связывающим приращения количеств электронов на состояниях области «1» с токами переходов:

$$q_1^+[e] = q_1[e] + \Delta t \cdot \left(I_{01}[e+\varphi_1] - I_1[e+\varphi_1]\right), \qquad (11)$$

где Δt имеет смысл приращения времени t на шаге интегрирования; $q_1^+[e]$ – значение $q_1[e]$ на следующем шаге.

В настоящей работе проводилось моделирование (квази-)статических характеристик эмиссии $I(F)$, для чего вычислялась зависимость $I(t)$ при медленном линейном изменении поля $F(t)$. Для исключения динамических эффектов шаг интегрирования Δt выбирался настолько малым, что обеспечивал бы удовлетворительную точность выполнения условия баланса токов $I_{01}(t) = I_1(t)$ для всех временных интервалов t.

Результаты моделирования и их обсуждение

На основании результатов экспериментальных работ (например [1, 13, 14]) можно выделить два основных типа отклонений статических эмиссионных характеристик в координатах Фаулера – Нордгейма (ФН) от линейной зависимости. Один из них – излом характеристики в области малых полей, сопровождающийся резким увеличением скорости нарастания тока после достижения им значений порядка долей наноампера; второй – насыщение зависимости при максимальных токах. Проведенные численные эксперименты показали, что такие особенности естественно возникают и на расчетных зависимостях, получаемых с использованием двухступенчатой модели эмиссионного процесса.

На рис. 2,*а* представлена эмиссионная характеристика в координатах ФН, содержащая обе указанные особенности и рассчитанная для модели с единственным акцепторным энергетическим уровнем e_S в поверхностной области. На рис. 2, *в*, *г* приведены временные зависимости заряда q_1 промежуточного состояния и тока эмиссии I_1 с него, которые были использованы для построения указанной эмиссионной характеристики. При проведении расчета предполагалось, что внешнее поле F медленно нарастает по линейному закону. На рис. 2,*б* показан

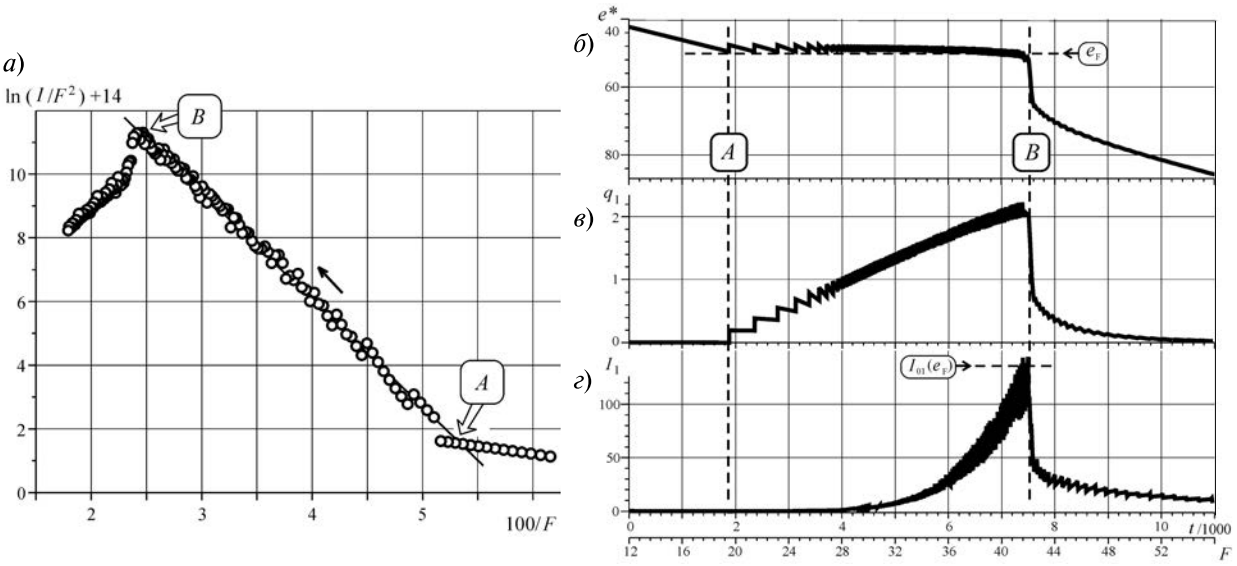


Рис. 2. Результаты расчета основных характеристик для модели, представленной графически на рис. 1,*в*:

а – токовая характеристика в координатах Фаулера – Нордгейма; *б-г* – зависимости параметров модели (см. пояснения в тексте) от «времени» (номера шага интегрирования) t и приложенного поля F

график для энергетического положения промежуточного состояния $e^* = e_S + \varphi_1$. Сопоставление этих графиков позволяет связать изломы на эмиссионной характеристике с изменением режима функционирования эмиссионного центра.

Первому из изломов (точка *A*) в рассматриваемой модели соответствует переход от преимущественной (или исключительной) эмиссии в вакуум электронов с объемного состояния ($I_0 >> I_1$) к доминированию эмиссии через промежуточное состояние ($I_1 >> I_0$). Меньшая скорость нарастания тока I_0 с ростом поля в рассмотренном случае связана с заданием большего коэффициента усиления поля для участков эмиттера, где возможен прямой переход электронов с объемных состояний в вакуум ($\beta_0 > \beta_1$). На практике подобное соотношение параметров может реализоваться, например, при наличии на поверхности эмиттера нескольких волокон или выступов, обеспечивающих значительное усиление поля β_0 для участков малой суммарной площади ($S_0 << S_1$). При этом вблизи точки излома *A* достигается приблизительное равенство эмиссионных токов I_0 и I_1, вычисляемых в соответствии с формулами (7) и (8).

Далее на расчетной характеристике ФН (см. рис. 2,*а*) присутствует приблизительно прямолинейный участок максимального наклона (до точки излома *B*), который можно отождествить с областью доминирования двухступенчатого механизма эмиссии через состояния области «1». При стационарном режиме эмиссии заряд (и определяемая им энергия) этих состояний приобретает такое значение, при котором ток электронных переходов из объема I_{01} уравновешивается током эмиссии I_1. В рамках дискретной модели выполнение условия баланса токов $I_{01} = I_1$ оказывается возможным лишь в смысле их средних по времени значений. Результатом временного шага, в ходе которого энергия промежуточных состояний e^* достигает значения e_F, является пополнение заряда q_1 током I_{01}, что приводит к возврату энергии уровня 1 к значениям $e^* < e_F$ и прекращению тока I_{01}. Процесс повторяется после нескольких временных шагов, в течение которых q_1 уменьшается за счет протекания тока эмиссии I_1. Для реальной системы установление такого автоколебательного режима необязательно (хотя при определенных условиях и возможно), поскольку для нее зависимости токов от полей и зарядов являются непрерывными функциями и статический баланс токов $I_{01} = I_1$ может быть обеспечен. В любом случае можно констатировать фиксацию энергетического положения промежуточных уровней (стационарного либо усредненного по времени) вблизи значения, соответствующего уровню Ферми для объема:

$$e^* \equiv e_S + \varphi_1 \approx e_F . \qquad (12)$$

При увеличении внешнего поля F поддержание энергии промежуточных состояний вблизи этого значения происходит за счет постепенного нарастания заряда q_1 заполняющих их электронов. Комбинируя формулы (12) и (4), получим линейную связь q_1 с величиной поля F, подтверждаемую также результатами моделирования (см. рис. 2,*в*):

$$q_1(F) \approx C_1 \left(F - (e_F - e_S) \right). \qquad (13)$$

В условиях столь медленного (линейного) роста q_1 экспоненциальный рост эмиссионного тока $I_1(F)$ достигается в основном за счет увеличения степени прозрачности поверхностного барьера для электронов, заполняющих промежуточные состояния $T_1[e^*]$. Подстановка формулы (12) в (10а) дает выражение для коэффициента прозрачности:

$$T_1[e^*](F) = \exp\left(-\frac{e_S^{3/2}}{\beta_1 F} \right) \qquad (14)$$

или для тока эмиссии —

$$I(F) \approx I_1(F) \approx q_1(F) T_1[e^*](F) = \\ = C_1 \cdot \left(F - (e_F - e_S) \right) \cdot \exp\left(-\frac{e_S^{3/2}}{\beta_1 F} \right). \qquad (15)$$

Таким образом, наклон токовой характеристики в координатах ФН для описываемого механизма эмиссии определяется величиной электронного сродства для промежуточных состояний (e_S), а значение работы выхода (e_F в терминах модели) вообще не может быть определено по статическим токовым характеристикам. Это дает объяснение известным фактам несоответствия величин работы выхода, определяемых из характеристик полевой эмиссии (в предположении их соответствия классической теории ФН), и значений работы выхода тех же

материалов, полученных любыми иными способами.

Второй излом расчетной эмиссионной характеристики (точка *B* на рис. 2,*а*) наблюдается после достижения током эмиссии I_1 значения, совпадающего с величиной тока переходов на промежуточные состояния I_{01} при $e^* = e_F$. Можно показать, что это максимальная величина тока, которая может инжектироваться из объема в поверхностную область. Следовательно, и стационарный ток эмиссии I_1 не может превышать этой величины.

В используемой модели, в соответствии с выражением (5), ток I_{01} не зависит от поля F явным образом и определяется лишь энергетическим положением уровней e^*. Вид зависимости $I_{01}(e^*)$ легко получить, если ввести упрощающее предположение о том, что степень заполнения промежуточных состояний всегда остается невысокой, т. е. $q_1 << f_1$ (при отказе от этого условия приводимые ниже формулы несколько усложнятся, но качественных изменений не произойдет). Тогда в рассматриваемой модели с единственным энергетическим уровнем в области «1» и прямоугольным энергетическим распределением электронов в области «0» (соотношения (1), (2)) формулы (5) и (6) при подстановке $\varphi_1 = e^* - e_S$ позволяют записать для зависимости тока на промежуточные состояния от их энергетического положения $I_{01}(e^*)$ следующее выражение:

$$I_{01}(e^*) = I_{01}[e^*](e^*) = S_{01} \cdot f_1 \cdot q_0[e^*] \cdot T_{01}[e^*] =$$

$$= S_{01} f_1 q_0[e^*] \cdot \exp\left(-D_{01} \left(\frac{e^*}{2} - \left(w_1 - \frac{e_S}{2} \right) \right)^{1/2} \right), \quad (16)$$

где

$$q_0[e^*] = \begin{cases} 0, & \text{если } e^* < e_F; \\ f_0, & \text{если } e^* \geq e_F. \end{cases}$$

Полученная зависимость $I_{01}(e^*)$ описывает функцию, равную нулю при $e^* < e_F$ (энергетическое положение промежуточных состояний соответствует запрещенной зоне объема) и монотонно убывающую при $e^* \geq e_F$ (промежуточные состояния на энергетической диаграмме располагаются напротив все более глубоких заполненных уровней объема эмиттера и оказываются отделенными от них все более высоким потенциальным барьером). Таким образом, значение $I_{01}(e_F)$ представляет собой абсолютный максимум функции. Это же значение является максимальным и для тока эмиссии I_1. После его достижения (в точке *B*), дальнейшее увеличение поля F и прозрачности поверхностного барьера T_1 приводит к некоторому нарушению баланса токов, связывающих промежуточные состояния с объемом и с вакуумом ($I_1 > I_{01}$), и уменьшению электронного заряда q_1. Снижение создаваемой зарядом компоненты электрического потенциала φ_1 приводит к смещению энергетического уровня промежуточных состояний вниз (рост e^*) и, в соответствии с зависимостью (16), – к уменьшению тока I_{01}. В результате наблюдается уменьшение эмиссионного тока с ростом поля, сопровождающееся резким падением заселенности промежуточных состояний (см. рис. 2,*в*). В ряде случаев на участке токовой характеристики вблизи ее излома при численном моделировании наблюдался гистерезис (несовпадение ветвей для нарастающих и падающих зависимостей $F(t)$, (рис. 3), явившийся результатом описанной выше положительной обратной связи между величинами q_1, φ_1 и I_{01}. С удалением от точки излома *B* спад зависимости $I_{01}(F)$ становится плавным, при этом величина заряда q_1 стремится к нулю. В целом можно говорить о снижении эффективности эмиссионного механизма из-за изоляции промежуточных состояний от объема эмиттера.

Обладающие указанными особенностями (изломами) характеристики были получены для простейшей идеализированной системы. Ток реальных эмиттеров обычно распределен между многими активными центрами, параметры которых в большей или меньшей степени различаются [14]. В результате, даже если для каждого из центров эмиссионная характеристика завершается спадом, токовая зависимость для всего распределенного эмиттера может оставаться монотонной. Наличие или отсутствие на ней особенностей (например изломов или скачков [13]) будет определяться статистикой свойств центров эмиссии.

Полученные численные решения для статических эмиссионных характеристик демонстрировали высокую устойчивость по отношению к корректировке электронных энергетических

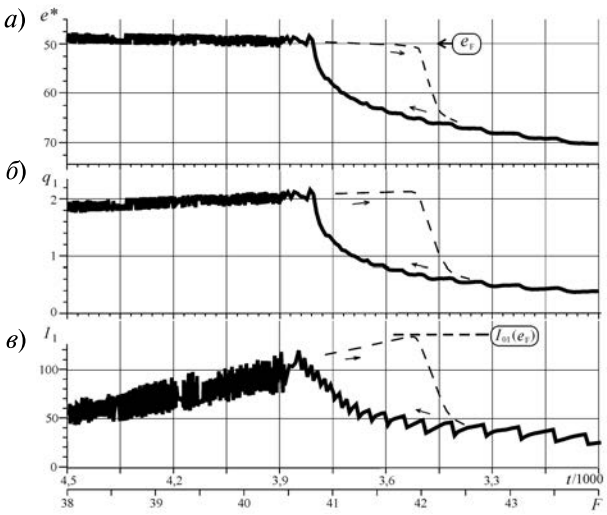


Рис. 3. Гистерезис зависимостей параметров модели (*а* — *в*) от величины поля *F* вблизи точки излома *B* токовой характеристики (см. рис. 2,*а*)

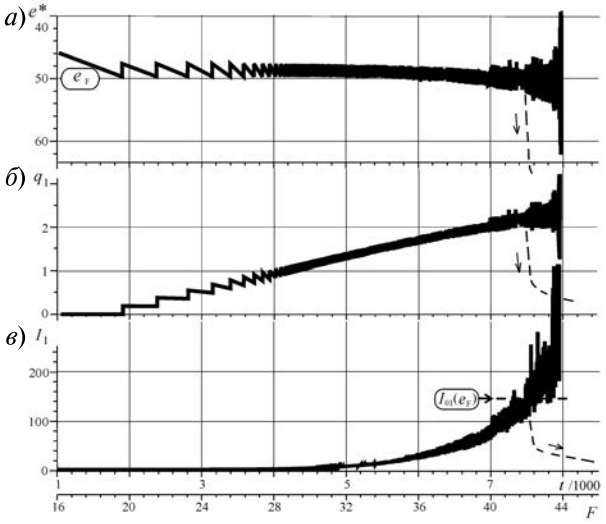


Рис. 4. Изменение расчетных характеристик (*а* — *в*) при переходе от модели с единственным энергетическим уровнем в области «1» (пунктир) к модели с поверхностной зоной вида, задаваемого формулой (3)

распределений, относящихся к объему эмиттера. Они, например, оставались практически неизменными при замене ступенчатого распределения $f_0[e]$ (см. формулу (1)) более плавными, а также при замене модели эмиттера, имитирующей собственный полупроводник или диэлектрик (при задании $e_F = e_V$), на металл или дырочный полупроводник ($e_F > e_V$) [4, 11]. В противоположность этому, введение дополнительных акцепторных состояний в поверхностной области «1» приводит к существенному изменению эмиссионных свойств. Примером может служить приведенное на рис. 4 сопоставление характеристик модели, имеющей единственный промежуточный уровень, с результатами расчетов для модели с прямоугольным распределением плотности состояний в поверхностной области (см. формулу (3)), условно представляющим электронные свойства диэлектрического кристаллита или пленки. Как видно из графиков, изменение распределения $f_1[e]$ при сохранении остальных параметров модели привело к продлению участка экспоненциального роста эмиссионного тока. Объяснение этой закономерности состоит в том, что при «погружении» нижнего из энергетических состояний поверхностной области $f_1[e^*]$ ниже энергии уровня Ферми начинают заполняться последующие состояния ($f_1[e^* - 1]$ и т. д.), и поле появляющегося на них заряда препятствует дальнейшему движению уровней вниз. Насыщения характеристики ФН для данной структуры энергетических распределений вообще не наблюдалось, и процесс моделирования завершался из-за неустойчивости решения при неограниченном экспоненциальном росте эмиссионного тока — в реальной системе этому могло бы соответствовать разрушение эмиссионного центра.

Таким образом, в данной работе предложена упрощенная численная модель двухступенчатого эмиссионного механизма, основанного на переносе электронов в вакуум через промежуточные состояния, локализованные в поверхностной области. С использованием модели получены расчетные эмиссионные характеристики, отличающиеся от предсказаний классической теории Фаулера — Нордгейма, но во многом сходные с известными из экспериментальных работ токовыми характеристиками полевой эмиссии из наноуглеродных материалов с относительно «гладкой» морфологией поверхности. В частности, в рамках предложенной модели находит объяснение многократно отмечавшееся отклонение угла наклона токовых зависимостей в координатах Фаулера — Нордгейма от величины, определяемой работой вы-

хода и коэффициентом усиления поля в области эмиссионного центра.

Снижение скорости роста тока эмиссии в сильных полях также описывается исследованной моделью. Оно может быть связано с ухудшением связи между поверхностными и объемными электронными состояниями. С точки зрения практических перспектив холодных автокатодов, ограничение величины тока каждого отдельного эмиссионного центра на уровне, исключающем его термическое разрушение, можно считать полезным качеством, потенциально позволяющим добиваться бóльших значений полного эмиссионного тока при более равномерном его распределении по поверхности катода.

Работа проводится при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (грант №11.G34.31.0041).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Образцов, А.Н.** Автоэлектронная эмиссия в графитоподобных пленках [Текст] / А.Н. Образцов, И.Ю. Павловский, А.П. Волков // ЖТФ. – 2001. – Т. 71, Вып. 11. – С. 89–95.

2. **Mao, D.S.** Electron field emission from a patterned diamond-like carbon flat thin film using a Ti interfacial layer [Текст] / D.S. Mao, X. Wang, W. Li, [et al.] // J. Vac. Sci. Technol. B. – 2000. – Vol. 18. – P. 2420–2424.

3. **Фролов, В.Д.** Исследование полевой электронной эмиссии из наноструктурированных материалов методом сканирующей туннельной спектроскопии [Текст] / В.Д. Фролов, А.В. Карабутов, В.И. Конов, С.М. Пименов // Микросистемная техника. – 2002. – № 1. – С. 37–41.

4. **Вейнгер, А.И.** Электрофизические исследования нанопористых углеродных материалов, приготовленных из порошков карбида кремния [Текст] / А.И. Вейнгер, Б.Д. Шанина, А.М. Данишевский [и др.] // ФТТ. – 2003. – Т. 45, Вып. 6. – С. 1141–1150.

5. **Бондаренко, В.Б.** Эмиссионные характеристики порошков из нанопористого углерода [Текст] / В.Б. Бондаренко, П.Г. Габдуллин, Н.М. Гнучев [и др.] // ЖТФ. – 2004. – Т. 74, Вып. 10. – С. 113–116.

6. **Пшеничнюк, С.А.** Энергетические распределения электронов, эмитированных с поверхности вольфрамовых острий, покрытых алмазоподобными пленками [Текст] / С.А. Пшеничнюк, Ю.М. Юмагузин // ЖТФ. – 2004. – Т. 74, Вып. 5. – С. 105–112.

7. **Захидов, А.А**. Механизм низковольтной эмиссии электронов из наноуглеродных материалов [Текст] / А.А. Захидов, А.Н. Образцов, А.П. Волков, Д.А. Ляшенко // ЖЭТФ. – 2005. – Т. 127, Вып. 1. – С. 100–106.

8. **Arkhipov, A.V.** Hysteresis of pulsed characteristics of field emission from nano-carbon materials [Текст] / A.V. Arkhipov, M.V. Mishin, I.V. Parygin // Surf. Interface Anal. – 2007. – Vol. 39. – P. 149–154.

9. **Arkhipov, A.V.** On possible structure of field-induced electron emission centers of nanoporous carbon [Текст] / A.V. Arkhipov, P.G. Gabdullin, M.V. Mishin // Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures. – 2011. – Vol. 19. № 1-2. – P. 86–91.

10. **Arkhipov, A.V.** Interpretation of dynamic and DC field-emission characteristics of nanocarbons in terms of two-stage emission model [Текст] / A.V. Arkhipov, M.V. Mishin // Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures. – 2011. – Vol. 19, № 1-2. – P. 75–80.

11. **Okotrub, A.V.** Electronic structure of diamond/graphite composite nanoparticles [Текст] / A.V. Okotrub, L.G. Bulusheva, V.L. Kuznetsov [et al.] // Eur. Phys. J. D. – 2005. – Vol. 34. – P. 157–160.

12. **Романенко, А.И.** Неоднородные электронные состояния в углеродных наноструктурах различной размерности и кривизны образующих их графеновых слоев [Текст] / А.И. Романенко, А.В. Окотруб, В.Л. Кузнецов [и др.] // УФН. – 2005. – Т. 175, № 9. – С. 1000–1004.

13. **Arkhipov, A.V.** "Fine structure" of emission I-V characteristics of nanodispersed films [Текст] / A.V. Arkhipov, P.G. Gabdullin // Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures. – 2011. – Vol. 19, № 1-2. – P. 81–85.

14. **Захидов, А.А**. Статистический анализ низковольтной автоэлектронной эмиссии из наноуглерода [Текст] / А.А. Захидов, А.Н. Образцов, А.П. Волков, Д.А. Ляшенко // ЖЭТФ. – 2003. – Т. 124, Вып. 6(12). – С. 1391–1397.

ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА

УДК 535.5

П.С. Гончарова, В.В. Криштоп, А.В. Сюй, Е.В. Толстов, О.Ю. Пикуль

ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКИМ СВЕТОМ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ АНИЗОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛОВ

Электрооптические модуляторы (ЭОМ) находят широкое применение во многих устройствах, в частности, в волоконно-оптических системах передачи информации [1], оптических компьютерах и для изготовления оптических затворов, хотя их применение до сих пор ограничивается жесткими требования на монохроматичность излучения для достижения эффективной модуляции. Современные ЭОМ эффективно модулируют световые потоки лазеров и лазерных диодов, имеющих узкий спектральный диапазон излучения (до единиц нанометров), и не пригодны для модуляции широкополосного излучения, имеющего произвольный спектральный состав в несколько десятков нанометров. В связи с этим, создание ЭОМ немонохроматического излучения является весьма актуальным [2].

В описании патента [3] представлен способ электрооптической модуляции немонохроматического излучения, имеющего прямоугольный профиль спектра. Нами рассмотрена схема электрооптического модулятора (рис. 1), включающая источник И широкополосного излучения с Гауссовым распределением амплитуды, три поляризатора П1, П2, П3, два идентичных кристалла К1, К2 ниобата лития и генератор U электрического поля, приложенного ко второму кристаллу. Излучение направлено вдоль кристаллографических осей y и перпендикулярно оптическим осям кристаллов z. Оси пропускания поляризаторов П1 и П3 параллельны другу и расположены под углом $\pi/4$ к оптическим осям кристаллов. Между первым и вторым кристаллом дополнительно введен поляризатор П2; при этом оптические оси первого и второго кристаллов, а также оси пропускания двух поляризаторов соответственно ориентированы параллельно друг другу.

Поляризатор П1 (точка A) ориентирован под углом $\alpha = \pi/4$ к оптической оси z кристалла K_1, что обеспечивает максимальную глубину модуляции [4, 5]. Направление вектора $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos\omega_0 t$ исходной волны составляет угол $\pi/4$ с осями x и z кристалла, а на входе в кристалл К1 (точка B) излучение на каждой длине волны λ_i разбивается на два луча (необыкновенный и обыкновенный) с взаимно ортогональными поляризациями $\mathbf{E}_{ez}$ и $\mathbf{E}_{ox}$ (рис.2,*а*), которые выражаются как

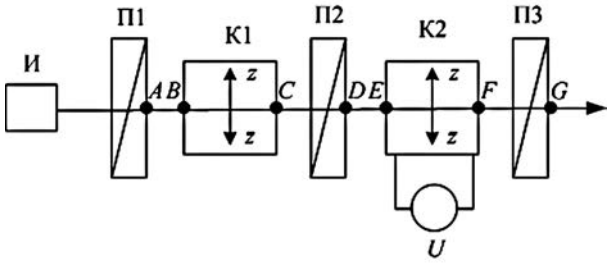


Рис. 1. Схема электрооптического модулятора: И – источник; П1–П3 – поляризаторы; К1, К2 – кристаллы $LiNbO_3$; U – генератор электрического поля. Базовые точки: A, D, G – выходы поляризаторов П1–П3 соответственно; B, C – вход и выход из кристалла К1; E, F – вход и выход из кристалла К2

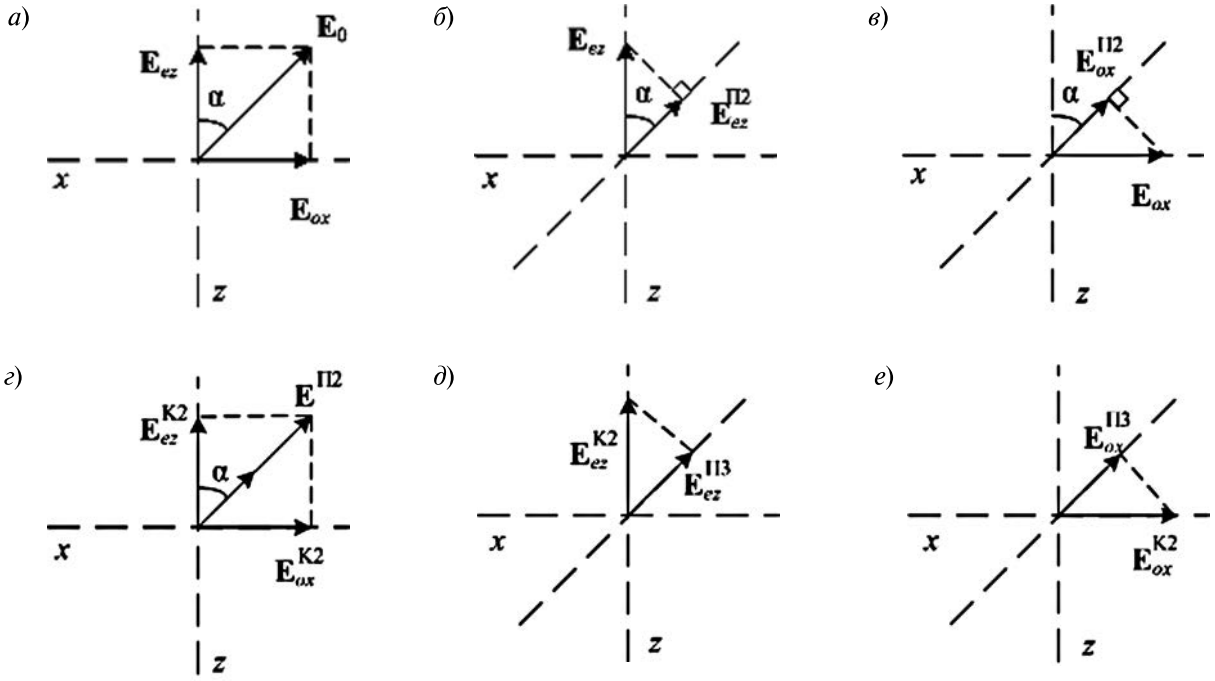


Рис. 2. Направления вектора напряженности электрического поля световой волны в разных точках модулятора (см. рис. 1): *B* (*а*), *D* (*б* – для необыкновенного луча, *в* – для обыкновенного); *E* (*г*); *G* (*д* – для необыкновенного луча, *е* – для обыкновенного)

$$E_{ez} = E_0 \cos\alpha;$$

$$E_{ox} = E_0 \sin\alpha.$$

На выходе из кристалла К1 (точка *C*) обыкновенный и необыкновенный лучи имеют разные направления и в общем случае разные значения напряженностей электрического поля (от 0 до $\sqrt{2}/2\, E_0$), которые определяются длиной кристалла l_1 и коэффициентами преломления n_o и n_e, что видно из следующих выражений:

$$E_{ez} = E_0 \cos\alpha \cos\left(\omega_0 t - k_e l_1\right);$$

$$E_{ox} = E_0 \sin\alpha \cos\left(\omega_0 t - k_o l_1\right),$$

где k_e, k_o – волновые векторы обыкновенного и необыкновенного лучей; $k_e = 2\pi n_e/\lambda_i$, $k_o = 2\pi n_o/\lambda_i$.

Поляризатор П2 ориентирован параллельно поляризатору П1, напряженность $\mathbf{E}^{(\text{П2})}$ для каждой длины волны λ_i после него (точка *D*) определится суммой проекций векторов $\mathbf{E}_{ez}$ и $\mathbf{E}_{ox}$ на направление оси пропускания поляризатора П2 (рис. 2, *б, в*), выражения для которых имеют вид:

$$E_{ez}^{(\text{П2})} = E_0 \cos^2\alpha \cos\left(\omega_0 t - k_e l_1\right);$$

$$E_{ox}^{(\text{П2})} = E_0 \sin^2\alpha \cos\left(\omega_0 t - k_o l_1\right).$$

Тогда результирующая напряженность при $\alpha = \pi/4$ определится как

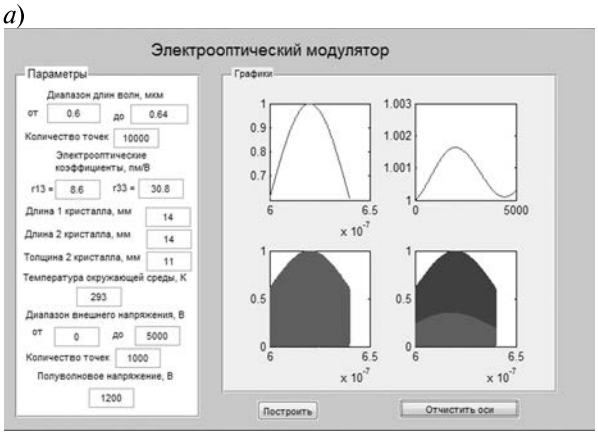
$$\left(E^{(\text{П2})}\right)^2 = (1/2)\, E_0^2 \left\{1 + \cos\left[l_1\left(k_o - k_e\right)\right]\right\} =$$

$$= E_0^2 \cos^2\left[\Delta\varphi 1_i/2\right],$$

где $\Delta\varphi 1_i = 2\pi l_1\left(n_o - n_e\right)/\lambda_i$ – разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами для длины волны λ_i в кристалле К1 [6].

Для каждой длины волны λ_i значение $\mathbf{E}^{(\text{П2})}$ будет своим; его модуль лежит в диапазоне от 0 до *E*, следовательно, и интенсивность излучения, которая пропорциональна квадрату напряженности, будет определяться длиной волны и иметь значение от нуля до некоторого максимального. Это означает, что спектр будет промодулирован по длине волны и в нем появятся максимумы и минимумы (спектр *1* на рис. 3, *б*).

а)



б)

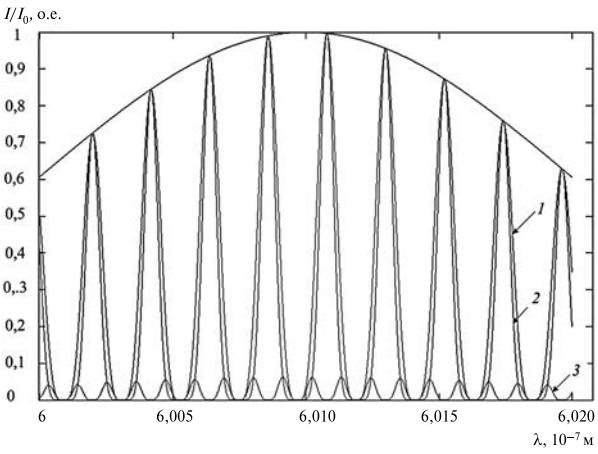


Рис. 3. Пример анализа работы модулятора на языке программирования MatLab; *а* – интерфейс программы; *б* – спектры прошедшего широкополосного излучения:
1 – через систему поляризатор П1-кристалл К1-поляризатор П2, *2* – через всю систему, *3* – через всю систему с приложением электрического поля к кристаллу К2

При входе излучения с напряженностью $\mathbf{E}^{(\Pi 2)}$ в кристалл К2 (точка *E*), оно также разбивается на два луча с взаимно ортогональными поляризациями для каждой длины волны λ_i (рис. 2, *г*), которые следует выражениям

$$E_{ez}^{(\mathrm{K}2)} = E_0 \cos\left(\Delta\varphi 1_i/2\right)\cos\alpha;$$

$$E_{ox}^{(K2)} = E_0 \cos\left(\Delta\varphi 1_i/2\right)\sin\alpha.$$

На выходе из кристалла К2 (точка *F*) толщиной l_2 выражения для модулей векторов напряженности для обыкновенного и необыкновенного лучей определятся как

$$E_{ez}^{(\mathrm{K}2)} = E_0\ \cos\left(\Delta\varphi 1_i/2\right)\cos\alpha\cos\left(\omega_0 t - k_e l_2\right);$$

$$E_{ox}^{(\mathrm{K}2)} = E_0\ \cos\left(\Delta\varphi 1_i/2\right)\sin\alpha\cos\left(\omega_0 t - k_o l_2\right).$$

При прохождении излучения через поляризатор П3 (точка *G*), ориентированный параллельно поляризатору П2, модуль вектора суммарной напряженности $\mathbf{E}^{(\Pi 3)}$ для каждой длины волны λ_i определится суммой проекций векторов

$$E_{ez}^{(\Pi 3)} = E_0\ \cos\left(\Delta\varphi 1_i/2\right)\cos^2\alpha\cos\left(\omega_0 t - k_e l_2\right)$$

и

$$E_{ox}^{(\Pi 3)} = E_0\ \cos\left(\Delta\varphi 1_i/2\right)\sin^2\alpha\cos\left(\omega_0 t - k_o l_2\right)$$

на направление оси пропускания (рис. 2, *д, е*).

Тогда суммарная напряженность определяется выражением

$$\left(E^{(\Pi 3)}\right)^2 = (1/2)\,E_0^2\cos^2\left(\Delta\varphi 1_i/2\right)\times$$
$$\times\left\{1+\cos\left[l_2\left(k_o - k_e\right)\right]\right\} =$$
$$= E_0^2\cos^2\left(\Delta\varphi 1_i/2\right)\cos^2\left(\Delta\varphi 2_i/2\right),$$

где $\Delta\varphi 2_i = 2\pi l_2\left(n_o - n_e\right)/\lambda_i$ – разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами для длины волны λ_i в кристалле К2.

Если кристаллы К1 и К2 идентичны ($l_1 = l_2 = l$), то разности фаз $\Delta\varphi 1_i$ и $\Delta\varphi 2_i$ между обыкновенным и необыкновенным лучами будут равны. Свет, который максимально прошел через кристалл К1, пройдет и через кристалл К2. На некоторых длинах волн (соответствуют положениям минимумов на рис. 3, *б*) излучение в кристалле К2 отсутствует; его не будет и на выходе из поляризатора П3. Таким образом, спектр излучения, прошедшего через всю систему, будет аналогичен спектру после поляризатора П2 (спектр *2* на рис. 3, *б*).

Общая интенсивность определяется суммой интенсивностей на всех длинах волн выбранного спектрального диапазона и выражается как

$$I = \sum_i I_i = \sum_i I_0\cos^2\left(\Delta\varphi 1_i/2\right)\cos^2\left(\Delta\varphi 2_i/2\right) =$$
$$= \sum_i I_0\cos^2\left[\pi l\left(n_o - n_e\right)/\lambda_i\right]\times$$
$$\times\cos^2\left[\pi l\left(n_o - n_e\right)/\lambda_i\right],$$

где I_0 – интенсивность излучения источника.

Под действием напряжения U, приложенного к кристаллу К2, показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей изменяются за счет электрооптического эффекта. Между обыкновенным и необыкновенным лучами появляется дополнительная разность фаз $\Delta\varphi_U$ [7]:

$$\Delta\varphi_U = \pi l\left(n_o^3 r_{13} - n_e^3 r_{33}\right)Ud\,/2\lambda_i,$$

где d – толщина кристалла вдоль приложенного электрического поля, U – приложенное напряжение; r_{13} = 8,6 пм/В, r_{33} = 30,8 пм/В – электрооптические коэффициенты.

На выходе поляризатора П3 для каждой длины волны λ_i происходит уменьшение интенсивности излучения. Суммарная интенсивность излучения в этом случае, определяется как

$$I = \sum_i I_i = \sum_i I_0 \cos^2\left(\Delta\varphi 1_i/2\right)\times$$
$$\times\cos^2\left[\left(\Delta\varphi 2_i + \Delta\varphi_U\right)/2\right] = \sum_i I_0 \times$$
$$\times\cos^2\left[\pi l\left(n_o - n_e\right)/\lambda_i\right]\times$$
$$\times\cos^2\left[\pi l\left(n_o - n_e\right)/\lambda_i + \pi l\left(n_o^3 r_{13} - n_e^3 r_{33}\right)U\,/2\lambda_i d\right].$$

В спектре излучения, прошедшего через модулятор, появляются дополнительные максимумы интенсивности, которые занимают промежуточное положение между минимумами (спектр *3* на рис. 3, *б*). При приложении полуволнового напряжения $U_{\lambda/2}$ количество максимумов и минимумов становится в два раза больше. Причем в этом случае интенсивность излучения в области максимумов в несколько раз меньше, чем при отсутствии управляющего поля.

Изменение электрического поля, вызванное модулируемым напряжением от 0 до $U_{\lambda/2}$, приводит к изменению интенсивности излучения, проходящего через ЭОМ, от максимального до минимального, то есть возникает амплитудная модуляция немонохроматического излучения; при этом

$$U_{\lambda/2} = \lambda_i d\,/\,l_2\left(n_o^3 r_{13} - n_e^3 r_{33}\right).$$

Анализ показывает, что суммарная интенсивность излучения на выходе модулятора при отсутствии напряжения в 7,5 раз выше, чем интенсивность в случае приложения полуволнового напряжения; это свидетельствует о глубине модуляции порядка 80 %.

Данная схема ЭОМ является термостабильной, так как в случае изменения температуры в кристаллах возникает одинаковая добавочная разность фаз (вследствие их одинаковых размеров). Такая стабильность приводит к тому, что максимумы и минимумы в спектре на выходе из модулятора изменяют свое положение, но не суммарную интенсивность. В итоге работа модулятора не нарушается и глубина модуляции не уменьшается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Криштоп, В.В.** Электрооптический модулятор для волоконно-оптических линий связи [Текст] / В.В. Криштоп, П.С. Лопатина // Известия вузов. Приборостроение. – 2009. – Т. 52. – № 12. – С. 67–71.

2. **Давыдов, Б.Л.** Поляризационно-независимый электрооптический затвор-модулятор на объемных кристаллах $LiNbO_3$ и $LiTaO_3$ [Текст] / Б.Л. Давыдов, А.А. Крылов, Д.И. Ягодкин // Квантовая электроника. – 2007. – Т. 37. – № 5. – С. 484–488.

3. **Пат. № 2267802 Российская Федерация, МПК[7] G 02 F 1/00.** Электрооптический модулятор [Текст] / Толстов Е.В., Строганов В.И., Криштоп В.В., Литвинова М.Н., Рапопорт И.В., Сюй А.В.; заявитель и патентообладатель Дальневосточный государственный университет путей сообщения. –№ 2267802; заявл. 25.05.2004г.; опубл. 10.01.2006г.; Бюл. № 01. – 3 с.

4. **Байбородин, Ю.В.** Электрооптический эффект в кристаллах и его применение в приборостроении [Текст] / Ю.В. Байбородин, С.А. Гаража. – М.: Машиностроение, 1967. – 79 с.

5. **Сонин, А.С.** Электрооптические кристаллы [Текст]: монография / А.С. Сонин, А.С. Василевская. – М.: Атомиздат, 1971. – 327 с.

6. **Veiras, F.E.** Phase shift formulas in uniaxial media: an application to waveplates / F.E. Veiras, L.I. Perez, M.T. Garea // Applied Optics. – 2010. – Vol. 49. – № 15. – P. 2769–2777.

7. **Мустель, Е.П.** Методы модуляции и сканирования света [Текст] / Е.П. Мустель, В.Н. Парыгин. – М.: Наука, 1970. – 296 с.

УДК 537.226.5

М.А. Марценюк, М.А. Фуфачев

ФОРМИРОВАНИЕ СРЕДЫ С ИСКУССТВЕННОЙ ОПТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТЬЮ

Развитие современных нанотехнологий ставит задачи создания сред с новыми свойствами [1, 2]. Одной из целей является конструирование оптически активных искусственных материалов (ОАИ-материалов). Оптическая активность относится к числу нелокальных эффектов (эффектов пространственной дисперсии), имеющих место в средах, локально не обладающих центром симметрии. Поэтому для создания ОАИ-материалов необходимо формирование определенной (киральной) структуры среды.

Имеющиеся в литературе исследования направлены в основном на феноменологическое описание явления оптической активности [3–5], в то же время принципы формирования ОАИ-материалов разработаны еще в недостаточной мере. В публикациях, посвященных этой теме (например, в работах [6, 7]), предлагаются лишь отдельные виды киральных структур.

Целью настоящей работы является, во-первых, развитие систематического метода формирования (порождения) локально гиротропной среды. В его основе лежит «метод орбит» групп преобразований, который в настоящее время считается наиболее универсальным [8]. Показано, что киральная структура может быть порождена из «затравочной» анизотропно поляризующейся наночастицы путем действия на нее операторами движения заданной пространственной (фёдоровской) группы преобразований. Во-вторых, в работе развит приближенный метод расчета тензора гирации непосредственно по данным о структуре локального окружения точки среды. Таким образом, с помощью этих методов разработчик имеет возможность не только «сконструировать» среду, но и предварительно оценить величину желаемого эффекта.

Для вычислений используется известный метод дискретной дипольной аппроксимации (ДДА) [9], согласно которому исследуемый объект представляется как совокупность взаимодействующих точечных диполей, наводимых внешним (в общем случае неоднородным) электрическим полем. Благодаря такому представлению можно приближенно описать отклик системы на внешнее поле в зависимости от формы и диэлектрической неоднородности составляющей ее совокупности частиц. Также возможно вычислить интегральные характеристики (мультиполи) рассматриваемой системы наведенных диполей в локальном окружении рассматриваемой точки среды, такие как суммарный дипольный, тороидный и квадрупольный моменты.

Как известно [3], угол вращения плоскости поляризации волны, прошедшей через образец, однозначно выражается через тензор гирации, который, как показано ниже, в свою очередь может быть выражен через тензор «перекрестной» дипольно-тороидной поляризуемости объекта $\varepsilon^{(pg)}$. Эта величина определяет возможность возникновения у рассматриваемой системы диполей суммарного дипольного момента $\mathbf{P}$ в вихревом поле ($\mathrm{rot}\,\mathbf{E} \neq 0$). При вычислениях удобнее рассчитывать сопряженную с ней величину $\varepsilon^{(gp)} = \varepsilon^{(pg)T}$, ответственную за возникновение тороидного момента, описываемого аксиальным вектором $\mathbf{G}$, при наложении на систему однородного поля $\mathbf{E}(t)$. Понятие аксиального тороидного момента было введено в работе В.М. Дубовика с соавторами [10] и в дальнейшем использовано для интерпретации явления оптической активности в работах [11, 12]. Аксиальный тороидный момент является интегральной характеристикой системы диполей (в нашем случае — описанной выше системой наведенных диполей) и характеризует вихревую составляющую их пространственного распределения. Так как поле волны является переменным ($\dot{\mathbf{E}}(t) \neq 0$), то переменным будет и тороидный момент $\mathbf{G}(t)$ и в системе возникнет вихревой электрический ток, который проявляется в том, что киральная диэлектрическая система намагничивается переменным электрическим полем, причем возникающий в ней эффективный магнитный момент $\mathbf{M}^{eff}(t)$ про-

порционален производной по времени $\frac{1}{c}\dot{\mathbf{G}}(t)$. Излучаемое этим моментом поле и является ответственным за эффект оптической активности (см. подробнее работу [13]).

Построение кирального окружения точки среды методом орбит

В настоящее время наиболее общим методом порождения форм считается метод орбит групп преобразований [8]. Далее для формирования ближайшего локального окружения точки среды из отдельных частиц используются точечные группы C_n, D_n, T, O, которые не включают в себя инверсионные повороты (инверсию, отражение в плоскости и зеркально-поворотное преобразование). Примеры орбит, генерируемых операциями этих групп, представлены на рис. 1.

В качестве «затравки» выбирается частица, обладающая эллипсоидом поляризуемости Ω, ориентированным определенным образом, и по заданной группе G строится его орбита $G\Omega$. Мы получим киральное окружение рассматриваемой точки среды, только если ориентация главных осей эллипсоида Ω не совпадает ни с одной из осей симметрии группы G. Обобщение метода на пространственные группы очевидно. Примеры, приведенные в работе, можно непосредственно использовать для тех пространственных групп, которые могут быть представлены как прямое произведение точечной группы на группу трансляций. Кроме того, как показано ниже, тетраэдрическая и октаэдрическая точечные группы позволяют генерацию кирального окружения, которое описывается скалярной составляющей тензора гирации. В связи с этим для таких форм пространственное расположение центральных точек, около которых рассматривается киральное расположение окружающих частиц, не имеет значения и применимо для неупорядоченных сред.

Для параметризации построенных киральных систем частиц, порождаемых группами C_n, D_n, удобно представлять себе вспомогательный конус (C_n) или цилиндр (D_n), ось которого направлена по главной оси симметрии группы. Для групп C_n центры эллипсоидов орбиты располагаются на образующих конуса в одной плоскости, параллельной основанию. Одна из полуосей каждого эллипсоида лежит в плоскости, касательной к конусу по той его образующей, на которой находится его центр и составляет с образующей угол β. Все эллипсоиды Ω_k получаются из «затравочного» Ω_1 поворотом вокруг оси симметрии C_n на угол $2\pi k / n$ (рис. 2).

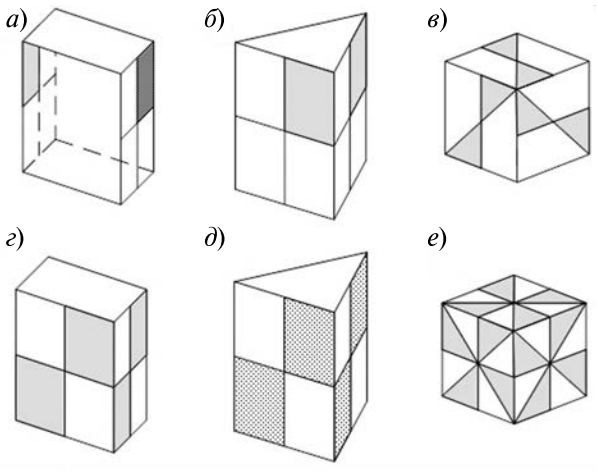


Рис. 1. Примеры орбит основных локальных групп симметрии, в состав элементов которых не входят сложные операции преобразования.
Представлены локальные группы: C_2 (*а*), C_3 (*б*), T (*в*), D_2 (*г*), D_3 (*д*), O (*е*). Затравочные области и их образы (орбиты) затушеваны

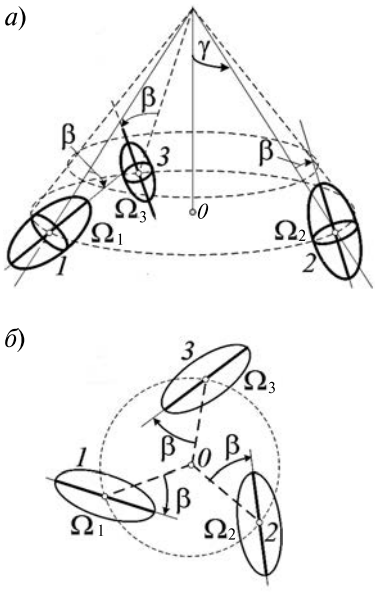


Рис. 2. Пример фигуры (*а*) пространственного расположения эллипсоидов поляризуемости частиц окружения относительно точки среды *0* и ее проекции (*б*) на плоскость *0-1-2-3*.
Расположение сгенерировано с помощью операций группы C_3

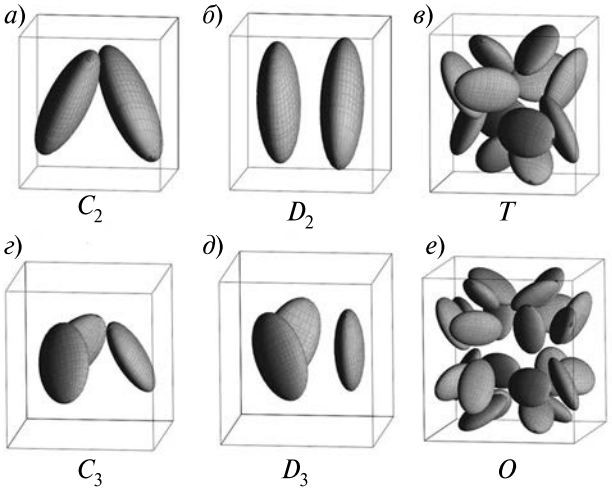


Рис. 3. Примеры формы исследуемых совокупностей частиц, порождаемых точечными группами, которые представлены на рис. 1, *а* – *е*

Данный тип киральных объектов можно описать через задание длин трех полуосей эллипсоидов поляризации, расположение их центров, угла раствора конуса γ и угла β. Отметим, что угол β служит параметром, управляющим «степенью» киральности. Если $\beta = 0$, то фигура не киральна. При смене знака β фигура переходит в свою энантиомерную форму. Для групп D_n центры эллипсоидов располагаются на образующих цилиндра, поэтому угол $\gamma = 0$.

Для групп T, O центр «затравочного» эллипсоида располагатся на грани куба в центре одного из закрашенных треугольников (см. рис. 1). При этом главные оси эллипсоида не должны совпадать ни с одной из осей симметрии группы. Применяя к эллипсоиду все операции симметрии группы, мы получим его орбиту, которая и даст нам киральное окружение с симметрией T, O (рис. 3, *в*, *е*). В качестве параметров, характеризующих данные группы, также можно использовать углы β и γ, так как при построении в вершинах куба окажутся частицы группы C_3 (см. рис. 1).

Описание метода дискретной дипольной аппроксимации

Для представления объекта в виде системы дипольных моментов необходимо разбить его на совокупность более мелких частиц (таких, что их формой и размером можно пренебречь), каждая из которых будет соответствовать точечному диполю; назовем их точками дипольной аппроксимации (ТДА).

Далее ограничимся рассмотрением диэлектрических и немагнитных частиц. В этом случае каждой ТДА соответствует эллипсоид поляризации, определяющий диэлектрические свойства объекта в данной точке пространства. Для применения метода ДДА необходимо задать координаты всех ТДА и ориентацию их эллипсоидов поляризации. При наложении внешнего электрического поля каждая ТДА приобретает дипольный момент $\mathbf{p}_a$, который зависит также от поля, наведенного соседними ТДА. Таким образом, для того, чтобы получить систему диполей, аппроксимирующую объект в электрическом поле, с учетом диполь-дипольного взаимодействия всех ТДА между собой, необходимо решить следующую систему линейных уравнений относительно $\mathbf{p}_a$:

$$\chi_a^{-1}\mathbf{p}_a - \sum_{\substack{a\neq b \\ b=1}}^{N} \frac{3(\mathbf{r}_{ab}\mathbf{p}_b)\mathbf{r}_{ab} - \mathbf{p}_b\mathbf{r}_{ab}^2}{\mathbf{r}_{ab}^5} = \mathbf{E}_a^{ext}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{E}_a^{ext}$ – внешнее поле в точке a, χ_a – тензор восприимчивости a-й ТДА, определяющийся эллипсоидом поляризации и его ориентацией; $\mathbf{r}_{ab}$ – расстояние от a-й до b-й ТДА; N – количество ТДА.

После решения системы будет найдена совокупность диполей $\mathbf{p}_a (a = 1, 2, ..., N)$, аппроксимирующих данную систему физических частиц, исходя из которой можно вычислить необходимые интегральные характеристики системы.

Связь тензора гирации с тензором перекрестной диполь-тороидной поляризации

Согласно известной теории оптической активности [3], пространственная дисперсия обусловлена тем, что индукция электрического поля $\mathbf{D}$ зависит не только от значения напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ в точке, но и от поля в ее окрестности. В слабо неоднородном поле справедливо выражение

$$D_i = \varepsilon_{ik}^{(0)} E_k + \gamma_{ikl} \frac{\partial E_k}{\partial x_l}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_{ik}^{(0)}$ – тензор диэлектрической проницаемости, зависящий от частоты ω и характери-

зующий среду при $k = 0$ (k – волновой вектор); γ_{ikl} – тензор третьего ранга, зависящий от частоты, антисимметричный по первой паре индексов; как следствие он может быть представлен как «вложение» тензора второго ранга:

$$\gamma_{ikl} = e_{ikm} g_{ml} . \qquad (3)$$

Тензор g_{ml}, называемый тензором гирации, является характеристикой свойств объекта. Если он отличен от нуля, то говорят, что тело обладает естественной оптической активностью, или естественной гиротропией. Как известно, такими свойствами может обладать лишь та среда, у которой отсутствует центр симметрии, то есть обладающая киральной структурой.

Наблюдаемый оптический эффект – вращение плоскости поляризации описывается удельным углом A вращения плоскости поляризации (УВПП), который определяется формулой [3]:

$$A = \frac{\omega |\mathbf{g}|}{2cn_0} \cos\theta, \qquad (4)$$

где $g_m = \frac{c}{\omega} g_{ml} k_l$ – вектор гирации ($k_l = \frac{\omega}{c} n_k$ – волновой вектор); n_0 – коэффициент преломления среды в направлении вектора $\mathbf{k}$ (n_k – вектор, равный по модулю n_0); θ – угол между векторами $\mathbf{g}$ и $\mathbf{k}$. Выразив правую часть выражения (4) через тензор гирации и волновой вектор $\mathbf{k}$, получим:

$$A = \frac{1}{2n_0 |\mathbf{k}|} kgk. \qquad (5)$$

Как видно из этой формулы, УВПП зависит от модуля волнового вектора $|\mathbf{k}|$ и свертки $g_{ml} k_l k_m$ тензора гирации с вектором $\mathbf{k}$. Поставим себе целью расчета вычисление тензора гирации, через который непосредственно выражается угол вращения плоскости поляризации излучения.

Как следует из выражения (2), в неоднородном электрическом поле диэлектрическая киральная среда поляризуется не только однородным полем, но и вихрем поля:

$$P_i = \varepsilon_{ik}^{pp} E_k + \varepsilon_{ij}^{pg} \left(\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right)_j , \qquad (6)$$

где ε^{pp} – тензор поляризуемости однородной составляющей поля; ε^{pg} – тензор «перекрестной» диполь-тороидной поляризуемости, который отвечает за поляризацию диэлектрика вихрем поля.

Как можно показать, транспонированный тензор $\left(\varepsilon^{gp} = \varepsilon^{pgT}\right)$ определяет возникновение аксиального тороидного момента [10–12], определяемого формулой

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a \qquad (7)$$

в приложенном поле

$$G_i = \varepsilon_{ik}^{gp} E_k + \varepsilon_{ij}^{gg} \left(\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right)_j , \qquad (8)$$

где ε^{gp} – тензор тороидной поляризуемости в однородном, а ε^{gg} – в вихревом полях.

Тороидный момент системы вычисляется по распределению дипольных моментов ТДА $\mathbf{p}_a (a = 1, 2, ...)$ с помощью формулы (7). Зная тороидный момент $\mathbf{G}$ и внешнее поле $\mathbf{E}$, можно вычислить тензор восприимчивости ε^{gp}, который связан с нужным нам тензором ε^{pg} соотношением $\varepsilon^{pg} = \left(\varepsilon^{gp}\right)^T$.

Свяжем теперь тензор перекрестной восприимчивости $\varepsilon^{gp}{}_{ik}$ с тензором гирации g_{ml}. Используя соотношения (2) и (5), представим производную поля по координатам в правой части (2) в виде суммы симметричной и антисимметричной частей:

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_l} + \frac{\partial E_l}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_l} - \frac{\partial E_l}{\partial x_k}\right).$$

Первое слагаемое – симметричный градиент поля далее не рассматривается, так как оно не дает вклада в интересующий нас эффект вращения плоскости поляризации. Второе слагаемое – несимметричный градиент поля выражается через ротор поля следующим образом:

$$\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_l} - \frac{\partial E_l}{\partial x_k}\right) = e_{lkj} \left(\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right)_j . \qquad (9)$$

Подставив это выражение в соотношение (2), с учетом (3) получим следующее выражение:

$$D_i = \varepsilon_{ik}^{(0)} E_k + \frac{1}{2}\left(g_{ij} - g_{ll}\delta_{ij}\right)\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right)_j . \qquad (10)$$

Поскольку $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, коэффициенты перед rot$\mathbf{E}$ в выражениях (6) и (10) можно выразить друг через друга:

$$\varepsilon_{ij}^{pg} = \frac{1}{8\pi}\left(g_{ij} - g_{kk}\delta_{ij}\right). \qquad (11)$$

Из этого выражения находим, что

$$g_{ij} = 8\pi\left(\varepsilon_{ij}^{pg} - \frac{1}{2}\varepsilon_{kk}^{pg}\delta_{ij}\right). \qquad (12)$$

Поскольку УВПП пропорционален свертке тензора гирации g_{ml} с симметричным тензором $k_l k_m$ (см. выражение (5)), то в величину УВПП дает вклад только симметричная часть тензора гирации, которую далее мы обозначим символом $g_{(ij)}$. Если выбрать оси координат по главным осям тензора $g_{(ij)}$, то выражение (5) можно записать в виде

$$A = \frac{1}{2n_0|\mathbf{k}|}\left(k_{x'}^2\tilde{g}_{11} + k_{y'}^2\tilde{g}_{22} + k_{z'}^2\tilde{g}_{33}\right), \qquad (13)$$

где $\tilde{g}_{11}$, $\tilde{g}_{22}$, $\tilde{g}_{33}$ – главные значения тензора; $g_{(ij)}$, $k_{x'}$, $k_{y'}$, $k_{z'}$ – проекции волнового вектора на главные оси.

Определив проекции вектора **k** на главные оси при помощи азимутального угла θ_k и полярного угла φ_k, а также учитывая, что $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}|n_k|$ ($|n_k|$ имеет смысл коэффициента преломления в направлении вектора **k**, и в данном случае $|n_k| = n_0$), выражение (13) преобразуем к виду

$$A = \frac{\omega}{2c}\left(\tilde{g}_{11}\sin^2\theta_k\cos^2\varphi_k + \right.$$
$$\left. + \tilde{g}_{22}\sin^2\theta_k\sin^2\varphi_k + \tilde{g}_{33}\cos^2\theta_k\right). \qquad (14)$$

Далее удобно ввести параметры

$$\xi = \frac{\omega}{6c}\left(\tilde{g}_{11} + \tilde{g}_{22} + \tilde{g}_{33}\right),\ \eta = \frac{\omega}{12c}\left(2\tilde{g}_{33} - \tilde{g}_{11} - \tilde{g}_{22}\right),$$

$$\zeta = \frac{\omega}{4c}\left(\tilde{g}_{11} - \tilde{g}_{22}\right).$$

Подставив их в выражение (14) и проведя простые алгебраические преобразования, получим:

$$A = \xi + \eta\left(3\cos^2\theta_k - 1\right) + \zeta\sin^2\theta_k\cos 2\varphi_k. \qquad (15)$$

Отсюда видно, что ξ (параметр изотропии) характеризует вклад в УВПП, не зависящий от направления вектора **k**; η (параметр эллиптичности) характеризует вклад в УВПП, зависящий только от угла θ_k; ζ (параметр асимметрии) характеризует зависимость УВПП от обоих углов – θ_k и φ_k.

Параметры ξ, η, ζ являются инвариантными характеристиками, зависящими только от тензора гирации, который в свою очередь зависит лишь от структуры среды. Поэтому способность среды вращать плоскость поляризации предлагается определять через них. Наибольший интерес здесь представляет параметр ξ, так как он характеризует способность среды вращать плоскость поляризации независимо от направления волнового вектора.

Таким образом, алгоритм расчета угла вращения плоскости поляризации излучения заданной пространственной структуры состоит из следующих шагов.

1. Порождение киральной структуры по заданной группе симметрии методом орбит.

2. Представление рассматриваемой локально-неоднородной структуры в виде совокупности дипольных точек; определение их координат и тензоров связи с полем χ.

3. Вычисление системы дипольных моментов методом ДДА в однородном поле.

4. Вычисление наведенного тороидного момента рассматриваемой структуры и перекрестной восприимчивости ε^{pg}.

5. Нахождение вектора гирации и угла вращения плоскости поляризации.

Зависимость угла вращения плоскости поляризации от параметров кирального окружения

Рассмотрим структуры, порождаемые некоторыми из групп, представленными на рис. 1, а именно группами C_2, C_3, D_2, D_3, T, O. Для наглядности изобразим частицы, образующие локальное окружение данной точки, в виде совокупности их эллипсоидов поляризации (рис. 3).

Геометрическими параметрами считаем углы β и γ (см. раздел, описывающий построение кирального окружения). После нахождения значений параметров ξ, η и ζ можно охарактеризовать способность рассматриваемого локального окружения, а следовательно и среды, вращать плоскость поляризации.

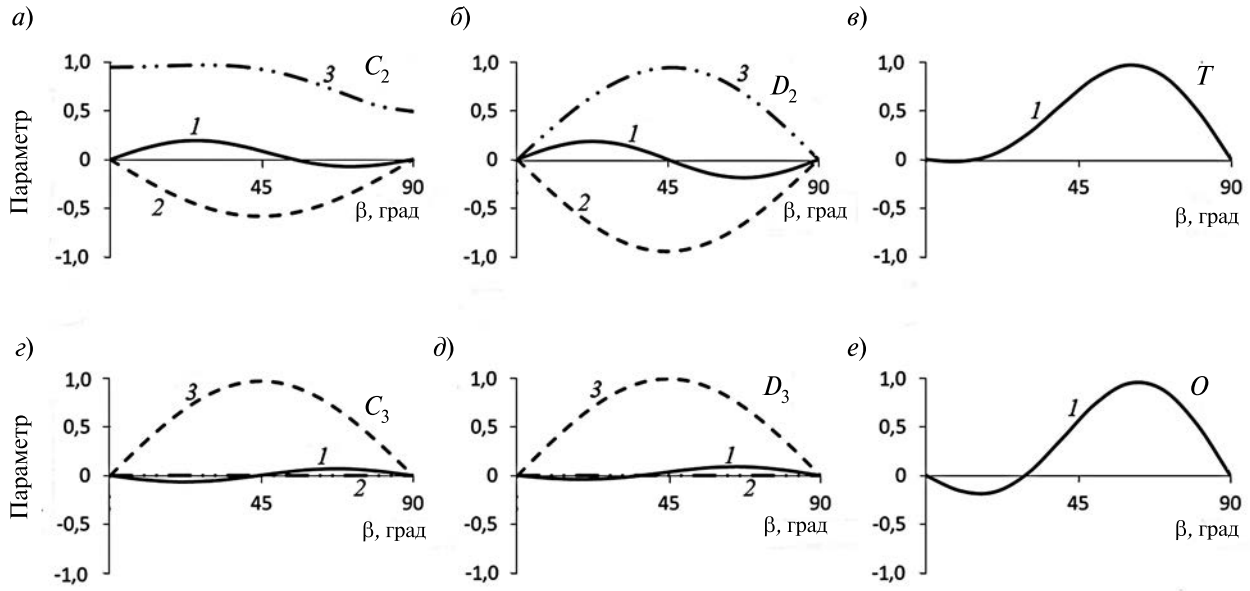


Рис. 4. Расчетные зависимости параметров изотропии ξ (*1*), эллиптичности η (*2*) и асимметрии ζ (*3*) от угла β (параметра степени киральности) для объектов, приведенных на рис. 3, *а* – *е*

Для всех типов локального окружения, представленных на рис. 3, были рассчитаны параметры ξ, η, ζ в зависимости от угла β, взятого на интервале $[0,\pi/2]$ (отрицательные значения угла β будут соответствовать энантиомеру объекта; значения всех параметров для них меняют знак). Для объектов C_n угол γ взят равным 30°, для остальных – равным 0°. Графики данных зависимостей УВПП от структуры представлены на рис. 4.

Параметр ξ характеризует вклад в УВПП, не зависящий от направления вектора **k**; данным параметром будет характеризоваться среда, в которой ориентация локального окружения распределена хаотично, например суспензия или композит с неориентированными включениями. В то же время параметры η и ζ потеряют смысл для такой среды, они могут характеризовать вклад в УВПП только в композитах с жестко упорядоченной структурой.

Для объектов, порождаемых группами T и O, ненулевым является только изотропный параметр – псевдоскаляр ξ. Среды, описываемые локальным окружением этих типов, оказываются гиротропными, а на макроскопическом уровне – изотропными.

Параметры η и ζ для тех структур, где они отличны от нуля (описывают анизотропию гиротропии, т. е. неизотропность тензора гиротропии) дают вклад, сопоставимый с вкладом от изотропного параметра (рис. 4). Так, для частиц C_3 и D_3 (рис. 4, *г*, *д*) видно, что УВПП не зависит от параметра ζ, а следовательно и от угла φ_k, лежащего в плоскости, на которой расположены центры эллипсоидов поляризации. Это означает, что при падении волны в этой плоскости УВПП будет зависеть только от изотропного параметра, однако при падении волны в другой плоскости будет вносить вклад параметр η, который, как видно из графиков, по модулю больше ξ. Только для объектов групп D_2 и C_2 все три параметра отличны от нуля; это следует из того, что они обладают самой слабой симметрией.

Таким образом, в данной работе для решения поставленной цели – формирования искусственной среды, обладающей оптической активностью, предложено использовать метод орбит, позволяющий сформировать киральное окружение данной точки среды. Конкретный вид окружения определяется как группой симметрии, так и углами ориентации эллипсоида

поляризации «затравочной» частицы и координатами центров частиц. Количественным признаком, по которому можно судить о величине угла вращения плоскости поляризации излучения, предлагается использовать инвариантные параметры ξ, η и ζ, характеризующие способность среды вращать плоскость поляризации излучения в определенных направлениях. Для теоретической оценки эффекта предлагается использовать метод дискретной дипольной аппроксимации. Расчеты показывают целесообразность применения данных методов для проектирования материалов. К тому же видна четкая логика построения киральной структуры и предложена возможность ее задания через минимальное количество параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Borreddy, S.R.** Advances in nanocomposites [Electronic resource] / S.R. Borreddy // InTech. – 2011. – www.intech.com/books. – 980 p.

2. **Schwartz, M**. Encyclopedia of smart materials [Text] / M. Schwartz. – Willey, 2002. – 1073 p.

3. **Ландау, Л.Д.** Электродинамика сплошных сред [Текст]: 3-е изд. испр. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1992. – 532 с.

4. **Barron, L.D.** Molecular light scattering and optical activity [Text]: 2nd ed. – L.D. Barron. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. – 103 p.

5. **Mason, S.F.** Molecular optical activity and the chiral discriminations [Text] / S.F. Mason. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 273 p.

6. **Гуляев, В.Г.** Новый класс искусственных геометрически-киральных 3D структур [Текст] / В.Г. Гуляев, В.А. Неганов, О.В. Осипов, Е.И. Пряников // ДАН. – 2008. – Т. 420. – № 1. – С. 42–44.

7. **Осипов, О.В.** К вопросу о физическом смысле материальных уравнений киральной среды [Текст] / О.В. Осипов, А.Н. Волобуев // Письма в ЖТФ. – 2009. – Т. 35. – Вып. 16. – С. 28–33.

8. **Leyton, M.A.** Gerative theory of shape [Text] / M.A. Leyton. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. – 554 p.

9. **DeVoe, H.** Optical properties of molecular aggregates. I. Classical model of electronic absorption and refraction [Text] / H. DeVoe // J. Chem. Phys. – 1964. – Vol. 41. – P. 393–400.

10. **Дубовик, В.М.** Аксиальные тороидные моменты в электродинамике и физике твердого тела [Текст] / В.М. Дубовик, Л.А. Тосунян, В.В. Тугушев // ЖЭТФ. – 1986. – Т. 90. – С. 590–605.

11. **Азанов, С.В.** Расчет тороидной поляризации хиральных молекул в однородном поле [Текст] / С.В. Азанов, М.А. Марценюк, И.Н. Сурков // Вестник Пермского университета. Физика. – 1999. – Вып. 5. – С. 16–21.

12. **Dubovik, V.M.** Material equations for electromagnetism with toroidal polarizations [Text] / V.M. Dubovik, M.A. Martseyuk, B. Saha // Physical Review. – 2000. – Vol. 61. – No. 6. – P. 7087–7097.

13. **Виноградов, А.П.** К вопросу о форме материальных уравнений в электродинамике [Текст] / А.П. Виноградов // УФН. – 2002. – Т. 172. – № 3. – С. 363–370.

ФИЗИЧЕСКОЕ МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

УДК 538.945

Н.А. Шурыгина, Л.А. Щербаченко, В.И. Донской, В.А. Карнаков, А.А. Трошев, Д.А. Краснов

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ НА МЕЖФАЗНЫХ ГРАНИЦАХ В ГЕТЕРОГЕННЫХ ПОЛИМИНЕРАЛЬНЫХ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМАХ

В настоящее время электрически активные гетерогенные дисперсные системы с развитой удельной поверхностью относятся к одним из наиболее перспективных классов современных материалов. Особые механические и электрофизические свойства этих систем позволяют создавать на их основе качественно новые материалы, характеристики которых во многом определяются методами их получения и зависят от химического состава компонентов.

В работе рассматривается неравновесная дисперсная система на примере полиминерального вяжущего – портландцемента, состоящая из мелкоразмерных зерен цементного клинкера, погруженных в водную полярную матрицу. На межфазных границах в таких системах возникает интенсивное кулоновское взаимодействие зарядов, находящихся на электрически активной поверхности частиц цемента с полярными молекулами и ионами водной пленки. При наличии многочисленных границ раздела в таких сложных дисперсных системах суммарный эффект межфазных взаимодействий становится особенно сильным и является определяющим для процесса генерации собственных электрических полей. Такое взаимодействие приводит к возникновению электрических сил в исследуемой системе и, как следствие, к градиентам потенциала внутреннего собственного электрического поля.

Все разновидности мелкодисперсных систем в силу условий их получения, особенностей химического состава и структуры являются неравновесными системами, и в связи с этим появляется способность поверхностных электрических дефектов к эффективной адсорбции полярных молекул из окружающей среды. В связи с тем, что водная компонента состоит из полярных молекул с ионными связями, внутреннее поле выступает в роли катализатора процессов диссоциации жидкой полярной матрицы и способствует увеличению в ней концентрации свободных зарядов. Смещение свободных заряженных частиц в жидкой полярной компоненте под действием устойчивого внутреннего поля в новые энергетически более выгодные места закрепления обеспечивает как миграцию ионов к активной поверхности твердой фазы, так и их накоплению в объеме электрически активной системы. Интенсивное накопление свободных зарядов жидкой и твердой компонентами свидетельствует о проявлении естественных электретных свойств в таких системах.

Цель работы заключалась в изучении структурных особенностей, генерации и реализации внутренней электрической энергии в образцах портландцемента марок 400, 500, а также образцов ПЦ-400, модифицированных низкоразмерной фракцией цементного порошка (далее ПЦ-400, ПЦ-500 и ПЦ-400 м), методами термостимулированной и диэлектрической спектроскопии. Исследование термостимулированных токов (ТСТ) в настоящее время является одним из основных инструментов получения инфор-

мации о состоянии полярных дефектов в твердых диэлектриках [1–3]. Образцы фиксированной массы помещались в специально сконструированную измерительную ячейку, представляющую собой плоский конденсатор с алюминиевыми электродами. Напряжение на электроды измерительной ячейки не подавалось. В связи с этим в эксперименте наблюдались процессы, происходящие только под действием внутреннего электрического поля. Регистрация обнаруженных ТСТ в изучаемой дисперсной системе производилась при линейном нагреве образца с постоянной скоростью, не превышающей 1 град/мин в интервале температур от 20 до 260 °С с помощью чувствительного вольтметра-электрометра В7-49 (погрешность измерения тока составляла 10^{-15} А). Низкая скорость нагрева обеспечивала отсутствие градиентов температуры в образце, что являлось необходимым условием получения информативных и достоверных термостимулированных токовых спектров. Полученные данные записывались в память компьютера через аналого-цифровой преобразователь, обрабатывались стандартными статистическими средствами и представлялись в виде временных диаграмм термостимулированных токов и температуры образца. Диэлектрический анализ изучаемой двухфазной системы осуществлялся емкостным методом с использованием измерителя импеданса Е7-20 в частотном диапазоне от 25 до 10^6 Гц.

На основании экспериментальных результатов электретно-термического анализа вычислены основные электрофизические параметры, наиболее полно отражающие динамику деполяризации исследуемой системы и ее физические свойства (см. таблицу). К ним относятся время релаксации τ, энергия активации U и плотность σ носителей электретного заряда. Время релаксации соответствует среднему времени, необходимому для термического разрушения электретного состояния системы, и определяется по ширине ΔT пикового максимума тока:

$$\tau = \int_{T_0}^{\infty} \frac{I(T)dT}{\beta I(T_0)}.$$

Электрофизические параметры образцов портландцемента (ПЦ) (результаты обработки экспериментальных данных)

Образец	T_{max}, °С	U, эВ	τ, 10^3 с	σ, 10^{-3} Кл/м^2
ПЦ-400	31	1,41	0,41	0,11
	64	2,08	0,95	0,32
	100	2,14	0,63	1,58
	217	2,36	1,06	7,41
ПЦ-500	31	0,89	1,12	0,76
	64	1,53	0,87	0,46
	107	2,20	0,68	2,78
	223	2,30	1,00	8,27
ПЦ-400-м	31	0,70	1,31	1,22
	64	1,48	0,88	0,75
	116	1,67	0,83	5,25
	230	2,37	1,01	8,11

ПЦ-400-м – образец ПЦ-400, модифицированный низкоразмерными частицами цементного порошка.

Обозначения: T_{max} – температура, соответствующая максимуму тока; U – энергия активации; τ – время релаксации; σ – плотность носителей электретного заряда

Энергия активации U носителей заряда в окрестности температуры некоторого максимума характеризует вероятность выхода заряженных дефектов из потенциальных ловушек твердой фазы изучаемой системы при данной температуре. Величина рассчитывалась по температурному положению T_{max} и ширине ΔT максимума тока в соответствии с выражением

$$U = \frac{k(T_{max})^2}{\Delta T},$$

где k – постоянная Больцмана [4].

Плотность σ термически освобожденного заряда характеризует концентрацию структурных дефектов в указанных ловушках и вычисляется по площади, заключенной под кривой термотока:

$$\sigma = \frac{1}{\beta S} \int_{T_n^{(1)}}^{T_n^{(2)}} I(T')dT',$$

где β = 1 град/мин – скорость нагрева; $T_n^{(1)}$, $T_n^{(2)}$ – нижняя и верхняя температурные границы релаксации носителей заряда n-го типа; $S = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ м^2 – площадь поверхности электродов ячейки.

Экспериментальная регистрация термостимулированных токов 10^{-10}–10^{-9}А в отсутствие внешнего напряжения свидетельствует о наличии в рассматриваемой дисперсной полиминеральной системе свободных электретных зарядов и существовании в ней нескольких механизмов накопления, релаксации и переноса электрической энергии.

Изучение динамики процесса реализации термостимулированных токов в рассматриваемой электрически активной системе позволяет установить природу доминирующих в ней релаксаторов, а также условия разрушения дипольной поляризации и объемно-зарядового состояния этой системы. Релаксационные процессы, ответственные за переориентационную подвижность различных полярных поверхностных и объемных активных включений при термической стимуляции проявляются в виде токовых спектров, весьма чувствительных к структуре исследуемой системы.

При исследовании термополяризационных токов в интервале температур от 20 до 260 °С наблюдается несколько доминирующих термомаксимумов (рис. 1), вызванных термически стимулированным движением электретных зарядов, а значительная амплитуда пиковых максимумов тока в указанном интервале температур обусловлена высокой концентрацией зарядов, накопленных как на межфазных границах, так и внутри объема рассматриваемых систем.

С ростом температуры системы, вследствие увеличения интенсивности теплового движения структурных элементов твердой фазы, происходит термический выход заряженных дефектов из потенциальных ловушек твердой компоненты в жидкую среду, что свидетельствует о постепенном разрушении этих структурных элементов, высвобождении запасенной в них энергии и появлении свободных носителей тока.

Свободные ионы жидкой фазы и заряды твердой компоненты движутся под действием внутреннего электрического поля в каналах ионной проводимости. Движение ионов можно представить как прыжки из одного вакантного узла в другой с преодолением потенциального барьера, равного энергии активации. Механизмом движения таких зарядов является диффузия и их дрейф в локальном электрическом поле,

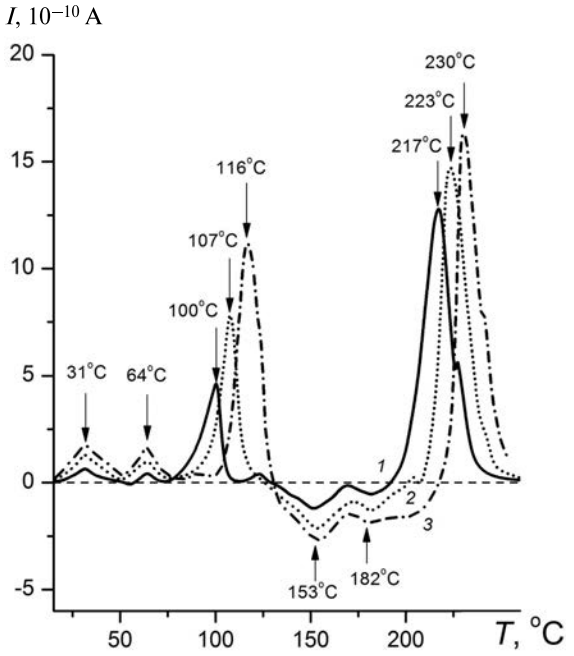


Рис. 1. Спектры термостимулированного тока образцов портландцемента: *1* – ПЦ-400; *2* – ПЦ-500; *3* – ПЦ-400-м

что и обуславливает наличие термостимулированного тока. Поскольку до начала процесса активации эти носители тока являлись частью структуры твердой и жидкой фаз исследуемой дисперсной системы, динамика термостимулированных токов позволяет изучать структурные особенности всей системы в целом, а также ее отдельных компонентов.

Экспериментально установлено, что в спектрах термостимулированных токов прослеживаются две температурные области. В низкотемпературной (20–80) °С выявлено наличие максимумов термостимулированного тока (см. рис. 1) при температурах $T_1 = 31$ °С и $T_2 = 64$ °С, которые, по всей вероятности, связываются с накоплением межфазных свободных зарядов под действием внутреннего поля исследуемой электрически активной системы, а также с особенностями структуры водной компоненты.

Максимум релаксационного тока $I = 1{,}7 \cdot 10^{-10}$ А при 31 °С для образца ПЦ-400-м в три раза превышает аналогичные максимумы для образцов ПЦ-400 и ПЦ-500 при тех же условиях, что свидетельствует о наличии значительно большей концентрации свободных электретных зарядов в этом образце, накопленных на межфазных границах и в объеме изучаемой системы.

Подтверждением этого факта является увеличение плотности заряда от $\sigma_1 = 0{,}11 \cdot 10^{-3}$ Кл/м^2 до $\sigma_3 = 1{,}22 \cdot 10^{-3}$ Кл/м^2 (см. таблицу), вычисленной по профилю термостимулированных спектров.

Источником таких зарядов являются процессы ионизации, в ходе которых молекулы воды распадаются на ионы. Согласно теории Пула – Френкеля, диссоциация молекул жидкости в окрестности 35–36 °С осуществляется преимущественно под действием внутреннего электрического поля, поскольку энергии теплового движения молекул для их ионизации недостаточно [5].

Выше 36 °С упорядоченная структура полярной жидкой воды постепенно разрушается под действием теплового движения, что приводит к ослаблению связей между молекулами. При некоторой «критической» температуре и достаточной энергии активации носители заряда покидают потенциальные ловушки; при этом происходит разрушение дефектов определенного вида и выход освобожденных зарядов в каналы ионной проводимости. Факт уменьшения энергии активации указывает на возможность более интенсивного выхода накопленных электретных зарядов в каналы ионной проводимости в окрестности этой температуры.

Максимум термотока, обнаруженный на релаксационном спектре термостимулированной поляризации при температуре 64 °С (см. рис. 1), вероятно, связан с перестройкой структурированной воды в объемное состояние, на что указывают многочисленные экспериментальные работы [6–8]. При этой температуре происходит тепловое разрушение упорядоченной структуры связанных слоев кластеризованных молекул, и направление диполей молекул воды в них становится хаотическим, что приводит к значительному уменьшению потенциального барьера, удерживающего рассматриваемые заряды вблизи активной поверхности. Наблюдаемая наибольшая амплитуда токового пика $I_3 = 1{,}5 \cdot 10^{-10}$А при температуре 64 °С (кривая *3* на рис. 1), может быть объяснена интенсивным проявлением свойств структурированной воды в связи с увеличением удельной активной поверхности частиц цемента. Установлено, что наибольшая интенсивность термотока при температуре 64 °С наблюдается в изучаемой системе для образцов портландцемента с модификатором. В связи с этим можно заключить, что концентрация связанной воды при большей величине активности поверхности твердой фазы будет максимально проявляться. Это подтверждается наибольшей термоактивационной амплитудой тока (кривая *3* на рис. 1).

Экспериментально выяснено, что положение низкотемпературных максимумов тока неизменно для всех исследуемых систем и не зависит от размеров частиц твердой фазы, которые прямо связаны с поверхностной активностью частиц цемента.

В интервале температур от 80 до 260 °С обнаружено два доминирующих максимума тока, которые в отличие от низкотемпературных проявляют зависимость от поверхностной активности частиц цемента. Экспериментальное обнаружение высокотемпературных термотоков связано с термическим разрушением и освобождением ионов из дефектных областей, расположенных на поверхности и в объеме частиц цемента. Значительная амплитуда релаксационных максимумов тока ($I \approx 1{,}5 \cdot 10^{-9}$ А) свидетельствует о большой концентрации накопленных зарядов на межфазных границах. Релаксационные максимумы тока в интервалах температур от 100 до 116 °С и от 217 до 230 °С позволили выявить зависимость температурного положения максимумов тока от величины удельной поверхности исследуемых образцов цемента. Для образцов портландцемента, характеризующихся большей удельной поверхностью, концентрация адсорбированной воды увеличивается, что приводит к расширению каналов ионной проводимости, обеспечивая более интенсивное движение термически освобожденных зарядов до электродов ячейки, и объясняет рост термостимулированного тока в этом диапазоне температур от $I_1 = 4{,}5 \cdot 10^{-10}$ А для образца ПЦ-400 до $I_3 = 1{,}1 \cdot 10^{-9}$ А для образца ПЦ-400-м (см. кривые *1*, *3* на рис. 1). Этот факт подтверждается увеличением плотности заряда от $\sigma_1 = 1{,}58 \cdot 10^{-3}$ Кл/м^2 до $\sigma_3 = 5{,}25 \cdot 10^{-3}$ Кл/м^2 для образцов ПЦ-400 и ПЦ-400-м, соответственно. При этом отмечается уменьшение энергии активации носителей заряда от $U_1 = 2{,}14$ эВ до $U_3 = 1{,}67$ эВ (см. таблицу). При термическом распаде основных структурных элементов системы образованные заряды попадают в каналы ионной проводимости и под действием гради-

ентов потенциала внутреннего поля аккумулируют электрический ток. Обнаружено, что для образцов модифицированного цемента максимум термоактивационного тока сдвигается в область более высоких температур и составляет 230 °С, по сравнению с менее активным образцом ПЦ-400, температурное положение токового максимума которого соответствует 217 °С. Этот факт можно интерпретировать следующим образом.

Свободные электретные заряды, образованные в процессе ионизации, под действием собственного внутреннего поля накапливаются на межфазных границах жидкой и твердой компонент в результате кулоновского взаимодействия с активными поверхностными центрами частиц цемента. Процессы накопления свободных ионов сопровождаются частичным экранированием электрического поля поверхностных центров. Экранирование зарядов, находящихся на электрически активной поверхности твердой компоненты, происходит более эффективно при большей концентрации свободной водной фазы, которая прямо зависит от величины удельной поверхности частиц цемента. Экранирование приводит к ослаблению суммарного электрического собственного поля системы, и, наоборот, низкая концентрация величины адсорбции водной фазы незначительно изменяет величину суммарного внутреннего поля. Энергия активации заряженных дефектов, находящихся на активной поверхности и в объеме механоактивированных частиц цемента, является результирующей от вкладов энергий электрического и теплового полей. В связи с этим можно полагать, что при меньшей величине концентрации водной фазы суммарное собственное электрическое поле системы способствует уменьшению энергии активации заряженных дефектов твердой фазы и облегчает их выход с поверхности и объема частиц цемента в каналы ионной проводимости. И, как следствие, облегченный электрическим полем выход ионов с поверхности частиц цемента осуществляется при более низкой температуре. Таким образом, при меньшем размере частиц ПЦ с наполнителем и, как следствие, при наличии в системе значительно большей концентрации водной компоненты высокотемпературный максимум термоактивационного тока сдвигается в область температуры $T_3 = 230$ °С. Смещение максимума термотока в область более высоких температур связано с интенсивным экранированием зарядов на поверхности твердой фазы. В связи с этим превалирующий вклад в энергию активации заряженных дефектов вносят тепловые колебания, и температура, при которой наблюдается максимум тока, повышается.

Особый интерес в нашем исследовании представляет объяснение полученной временной зависимости диэлектрической поляризации образцов всех трех видов ПЦ в нулевом внешнем поле. В связи с тем, что рассматриваемые дисперсные полиминеральные системы являются неравновесными, протекающие в них фазовые переходы, процессы гидратации и десорбции сопровождаются изменениями диэлектрической поляризации и потерями энергии. Экспериментально установлено, что временные изменения диэлектрической поляризации являются немонотонными (рис. 2) и зависят от различных протекающих в системе процессов, представленных десорбцией воды, явлениями тепломассопереноса и диффузии, связанных с химическим составом изучаемых образцов портландцемента.

В низкотемпературной области ($T = 21$ °С)

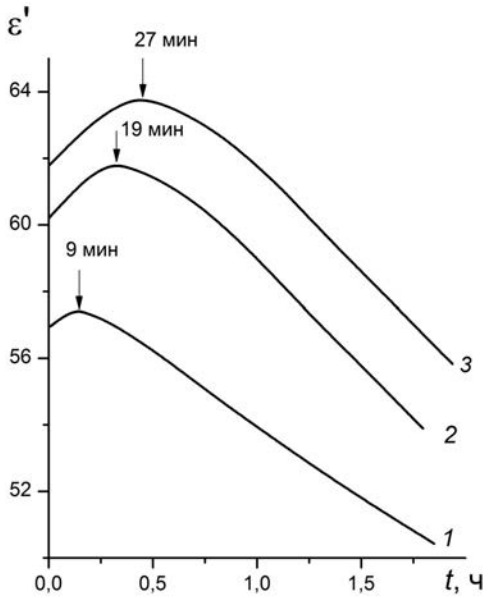


Рис. 2. Временная зависимость диэлектрической поляризации образцов ПЦ в нулевом внешнем поле на частоте ν = 25 Гц ($T = 21$ °С):
1 – ПЦ-400; *2* – ПЦ-500; *3* – ПЦ-400-м

временная зависимость диэлектрической поляризации ε′ проходит через максимум (см. рис. 2). Особенностью этой функции является запаздывание по времени проявления максимума поляризации ε′ для образцов ПЦ-400-м, характеризующихся большей удельной поверхностью по сравнению с образцами других марок ПЦ, отобранными для исследования. Этот факт можно объяснить следующим образом.

В процессе механоактивации частиц цемента появляются локализованные заряды — дефекты, способные в микрообластях исследуемой неравновесной системы создавать и поддерживать произвольно ориентированную собственную поляризацию. Высокая степень структурного беспорядка в таких образцах приводит к возникновению большого числа локализованных состояний поляризации. Если градиенты потенциала внутреннего поля системы достаточно большие, то в различных микрообластях системы могут реализоваться процессы миграции локализованных зарядов с поверхности или из объема частицы цемента через потенциальные барьеры, если они соизмеримы с величиной энергии активации. При этом выход локализованных зарядов из рассматриваемой области создает возможность изменять прежнее направление поляризации в системах и способствовать формированию единого направления поляризации релаксаторов во всем образце, совпадающего с направлением внутреннего собственного поля системы, что является временным низкотемпературным фазовым переходом диэлектрической поляризации, которая при этих условиях изменяется скачком.

Что касается образцов ПЦ, частицы которого характеризуются большой удельной поверхностью, то у них происходит временная задержка формирования максимума диэлектрической поляризации из-за наличия большей концентрации отдельных локальных микрообластей с «индивидуальной» поляризацией.

Таким образом, в результате проведенных экспериментов можно заключить, что внутреннее собственное поле электроактивных систем способно при больших величинах напряженности изменять направление поляризации релаксаторов в микрообластях исследуемой системы и формировать однородную поляризацию в объеме всего исследуемого образца. В качестве меры воспроизводимости было использовано относительное стандартное отклонение, которое по результатам анализа экспериментальных данных не превысило 3 %.

На основе полученных результатов нами построена модель электрофизических процессов, протекающих в гетерогенных системах. Кулоновское взаимодействие разноименных зарядов, которые упорядочены, близко расположены, но пространственно разделены и находятся на межфазных границах электрически активных твердых и жидких разнородных компонент, формирует двойной электрический слой (ДЭС); он является новой фазой структурообразования и кластеризованным слоем связанной воды.

Отличительной способностью этого ДЭС от рассматриваемых ранее является то, что он образуется под действием внутренней собственной электрической энергии системы, а межфазными границами являются разнородные твердые и жидкие полярные диэлектрики.

В объеме двойного электрического слоя, обуславливающего характерные свойства электрически активных конденсированных систем, происходит изменение структуры, физических свойств полярной жидкой матрицы и образование в ней молекулярных кластеров под действием внутреннего электрического поля, а также вырождение дипольно-ориентационной поляризации молекул жидкости. Таким образом, ДЭС является кластеризованным слоем связанной структурированной воды, расположенным между активной твердой фазой и свободной полярной жидкостью.

Вследствие проявления особых свойств ДЭС под действием внутреннего собственного поля слой структурированной связанной воды приобретает функции потенциального барьера как для свободных молекул, так и для молекул, ориентированных электрическим полем активной поверхности цементных зерен. Поскольку молекулы структурированного слоя полярной воды ориентированы собственным внутренним полем и жестко им удерживаются, то их переходы в область, где находятся свободные молекулы воды, характеризующиеся объемными свойствами, практически невозможны; в связи с этим переход является запрещенным.

Вне ДЭС в свободном объеме полярной воды напряженность внутреннего электрического поля равна нулю и молекулы находятся только под действием хаотического теплового движения. В процессе теплового движения возможен случайный переход свободной молекулы в область структурированного слоя полярной воды. Однако в этом случае она будет жестко ориентирована собственным внутренним полем системы и объединена с молекулами структурированного слоя жидкости в линейный кластер. Кроме того, следует учесть, что плотная упаковка молекул в упорядоченном слое водной компоненты служит препятствием для включения в ее структуру дополнительных молекул. Это обстоятельство является запрещающим фактором проникновения свободных молекул жидкости в область действия внутреннего электрического поля, где слой воды характеризуется кластеризованной структурой.

В исследуемых полиминеральных дисперсных электрически активных системах частицы портландцемента погружены в полярную водную матрицу. Внутреннее собственное электрическое поле системы, являясь катализатором процессов ионизации молекул воды, способствует увеличению концентрации свободных ионов, часть которых способна гидратироваться из-за электрически активного окружения полярных молекул и ионов. Гидратные оболочки гидроксилов и протонов, представляющие собой слой связанной воды, – это устойчивое прочное образование, выполняющее барьерную функцию как для свободных молекул воды, так и для молекул структурированного слоя. По всей вероятности, гидратные оболочки рассматриваемых ионов являются прочными структурированными устойчивыми ассоциатами, что, вероятно, связано с более высокими температурами процессов их разрушения.

Оболочка гидратированных ионов воды есть кластеризованный слой связанной воды, расположенный между зарядом иона и свободными молекулами воды; она удерживается около заряженного иона кулоновскими электрическими силами. Это по сути ДЭС, принадлежащий как ионам, так и молекулам свободной воды.

Итак, по результатам проведенных исследований можно сделать следующие основные выводы:

собственное внутреннее электрическое поле неравновесных гетерогенных дисперсных систем, которое есть следствие межфазного взаимодействия активных твердых поверхностей и полярных жидких матриц, выступает в роли главного фактора. Это фактор обуславливает возникновение направленного движения носителей свободного электретного заряда, который образуется при термическом разрушении объемно-зарядового состояния исследуемой системы;

в исследуемых образцах портландцемента зарегистрировано появление градиентов потенциала устойчивого внутреннего поля;

установлено, что интенсивность межфазного взаимодействия, эффективность кластеризации структуры полярной воды и, как следствие, напряженность собственного внутреннего электрического поля полиминеральных дисперсных систем зависят как от размеров механоактивированных частиц твердой фазы, так и от концентрации жидкой компоненты. В связи с этим появляется возможность управления градиентами потенциала внутреннего электрического поля в рассматриваемых электрически активных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гороховатский, Ю.А**. Термоактивационная токовая спектроскопия высокоомных полупроводников и диэлектриков [Текст] / Ю.А. Гороховатский, Г.А. Бордовский. – М.: Наука, 1991. – 248 с.

2. **Щербаченко, Л.А.** Электретный эффект и процессы электропереноса в дисперсных системах органического и неорганического происхождения [Текст] / Л.А. Щербаченко, В.С. Борисов, Н.Т. Максимова [и др.] // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79. – Вып. 9. – С. 129–137.

3. **Щербаченко, Л.А.** Электретно-термический и диэлектрический анализ структуры электрически активных коллоидных систем [Текст] / Л.А. Щербаченко, В.С. Борисов, Н.Т. Максимова [и др.] // Журнал технической физики. – 2010. – Т. 80. – Вып. 8. – С. 136–142.

4. **Щербаченко, Л.А.** Анализ структурного взаимодействия электрически активных гетерогенных мелкодисперсных систем на границах раздела твердой и жидкой фаз [Текст] / Л.А. Щербаченко Н.Т. Максимова, С.С. Барышников [и др.] // Физика твердого

тела. – 2011. – Т. 53. – Вып 7. – С. 1417–1422.

5. **Борисов, В.С.** Особенности диэлектрического отклика гетерогенных систем с полярной матрицей, содержащей электрически активные включения [Текст] / В.С. Борисов, Ю.В. Аграфонов, Л.А. Щербаченко [и др.] // Физика твердого тела. – 2011. – Вып. 1. – С. 52–57.

6. **Пинчук, Л.С.** Термостимулированная деполяризация крови человека [Текст] / Л.С. Пинчук, А.Г. Кравцов, С.В. Зотов // Журнал технической физики. – 2001. – Т. 71. – Вып. 5. – С. 115–118.

7. **Дерягин, Б.В.** Вода в дисперсных системах [Текст] / Б.В. Дерягин, Н.В. Чураев, Ф.Д. Овчаренко [и др.] – М.: Химия, 1989. – 228 с.

8. **Gaur, M.S.** Thermally stimulated current analysis in human blood [Text] / M.S. Gaur, R.K. Tiwari, Prashant Shukla [et al.] // J. Trends Biomater. Artif. Organs. – 2007. – Vol. 21 (1). – P. 8–13.

УДК 620.22(075.8): 615.462

О.Н. Саракуз, Г.И. Горяйнов,
В.М. Капралова, А.И. Слуцкер

НОВЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННО СШИТЫЕ СЕГМЕНТИРОВАННЫЕ ПОЛИЭФИРУРЕТАНСИЛОКСАНОВЫЕ ЭЛАСТОМЕРЫ ДЛЯ МЕДИЦИНСКИХ ИМПЛАНТАТОВ

Одной из наиболее обширных групп полимеров медико-биологического назначения являются полимеры, используемые для создания медицинских имплантатов. Имплантат – объект, вводимый в организм хирургическими методами и функционирующий в условиях полного или частичного окружения живыми тканями, поэтому он должен быть совместим с окружающими тканями по механическим, химическим, поверхностным и фармакологическим свойствам. Изучение биосовместимости медицинских материалов развивается в течение уже 50 лет, и за это время относительно инертными и биосовместимыми в качестве материалов для протезов мягких тканей признаны полиэфиры, фторполимеры (тефлон, или политетрафторэтилен), полипропилен, полиуретаны, силиконы и некоторые сополимеры. На протяжении последних 30 лет для создания имплантатов применялись два основных биоматериала: сшитые силиконовые резины и полиуретановые термопласты [1].

Важным преимуществом силиконовых резин, или полиорганосилоксановых эластомеров, по сравнению с другими биоинертными имплантируемыми материалами, является близость их консистенции к консистенции окружающих тканей. Силоксановые связи, составляющие скелет макромолекул полиорганосилоксанов, устойчивы химически и при этом обладают высокой гибкостью. Проблемы при использовании силиконовых имплантатов связаны в основном с адсорбцией окисленных жиров из окружающих тканей, которое вызывает набухание и изменение размеров протеза. К недостаткам силиконовых материалов нужно отнести и необходимость их вулканизации, или создания поперечных ковалентных сшивок для придания материалу необходимых механических свойств, поскольку линейные или разветвленные полиорганосилоксаны при комнатной температуре являются вязкими жидкостями.

Полиуретаны представляют собой сополимеры, состоящие из гибких и жестких сегментов, соединенных уретановой группой –CO(O)NH–. Уретановая группа дает возможность для поперечных сшивок макромолекулярных цепей, что обеспечивает большое разнообразие механических свойств полиуретанов: от мягкого каучукоподобного термопластичного эласто-

мера до прочного конструкционного материала в зависимости от соотношения гибких и жестких сегментов. К недостаткам полиуретанов относятся невысокая химическая стойкость к действию повышенных температур и щелочей, накопление остаточных деформаций при длительных нагрузках, резкая зависимость физико-механических свойств от перепадов температуры. Но несмотря на то, что полиуретаны в силу своего химического строения подвержены биодеградации (распаду с образованием диаминов, диолов и углекислого газа), в настоящее время адекватной замены им как биомедицинскому материалу нет. Полиуретаны сочетают в себе такие свойства, как высокая прочность на разрыв, большое сопротивление истиранию, отсутствие усталости, смазываемость, легкость переработки и биосовместимость. С помощью вариации химического строения основной цепи полиуретанов возможно управлять свойствами материала, выбирая наиболее важные для конкретного применения.

В то же время существует ряд нерешенных проблем при использовании этих полимеров, а также новые задачи, которые выдвигаются в связи с развитием хирургических и терапевтических методов лечения [2]. Кроме того, в настоящее время ни один из применяемых в медицине полимеров не может считаться истинно тромборезистентным. Поэтому при создании нового материала биомедицинского назначения представляется привлекательным сочетание достоинств указанных полимеров при использовании как в качестве долгосрочных имплантатов, так и для устройств одноразового применения. Сочетание биосовместимости и биостабильности силиконовых эластомеров с технологичностью и прочностью полиуретанов позволило бы создать практически идеальный биоматериал.

Объединить достоинства этих полимеров позволяет использование сополимеров, в которых могут сочетаться свойства полимеров, образующих каждый гомополимер, в едином материале; это, как правило, невозможно при создании композитов физическим смешиванием компонентов. Применение полиорган-полисилоксановых сополимеров для медицинских целей может устранить и недостатки, которые свойственны гомополимерам. Прочность сополимеров может изменяться в широких пределах и превосходить прочность силоксанового каучука в 2–3 раза, при этом механические свойства полиуретана будут сохранены, а гемосовместимость и тромборезистентность будут лучше, чем у каждого из материалов по отдельности [3].

Значительный интерес представляют линейные сополимеры, в которых вклады различных по природе блоков создают комплекс специфических свойств. Введение же в такие сополимеры в качестве одного из блоков полиорганосилоксана, который характеризуется низкой температурой стеклования, химической, гидролитической, радиационной и термической устойчивостью, высокой газопроницаемостью, малой зависимостью физико-химических свойств от температуры, малым поверхностным натяжением, высокой гидрофобностью и морозостойкостью, позволяет получать материалы с различными полезными свойствами. Еще в 1970-е гг. многие исследовательские группы пришли к мнению о необходимости сочетать достоинства полисилоксанов и полиуретанов в едином биоматериале. На основе этого подхода были созданы покрытия, взаимопроникающие сетки, модифицирующие поверхность добавки к полиуретанам, и, уже в последние годы, высокопрочные сополимеры, обладающие комплексом свойств, делающим их перспективными материалами для имплантатов.

В мире и в РФ выпускаются полиорганосилоксановые материалы медицинского назначения [4, 5], однако представляется крайне привлекательным и перспективным создание материала, позволяющего проводить направленную вариацию свойств без изменения химизма процесса синтеза. Анализ информационных источников позволяет утверждать, что таким материалом может стать трехмерно сшитый сополимер полиэфируретана и полисилоксана. Описанные в литературе методы синтеза позволяют получать полисилоксануретаны линейного строения, а также сшитые материалы, включая взаимопроникающие двойные сетки [6]. Однако сополимер, содержащий одновременно протяженные фрагменты полиэфира, полисилоксана и уретановые сшивки, образующие трехмерную сетку, в литературе не описан. Несомненно, что, используя известные из литературы принципы синтеза полиуре-

тансилоксанов, а также варьируя длину блоков, их соотношение и густоту сшивок, можно осуществить направленное изменение физико-механических свойств материала. Новый пространственно сшитый сополимер является термореактопластом, и после отработки технологии из него можно будет создать объемные изделия нужной формы, например индивидуальные (не типовые) эндопротезы. Именно разработка методики синтеза и получение новых пространственно сшитых сегментированных сополимеров эфируретана и силоксана, механическими свойствами которых можно управлять путем варьирования молекулярной массы и относительного содержания сегментов, а также типа отвердителя, являлась задачей работы.

Главной особенностью химизма процесса получения нового трехмерно сшитого полиэфируретансилоксанового эластомера является использование трехфункционального олигомерного полиэфира (с тремя группами ОН) в качестве одного из компонентов синтеза (форполимеров). Третья группа дает дополнительный узел химической сшивки и позволяет получить материал, который лучше с точки зрения термостабильности его механических свойств. В большинстве используемых сополимеров свойства зависят от физических сшивок (типа Ван-дер-Ваальсовых) между жесткими блоками, которые менее стабильны, чем ковалентные связи, образующиеся при химическом сшивании. Кроме этого, введение полиэфируретановых фрагментов в полисилоксановую цепь повышает гидролитическую устойчивость сополимера, что также важно для биомедицинских применений.

Варьирование механических свойств продукта синтеза – эластомера – возможно путем комбинирования одновременно трех параметров: числа сшивок, молекулярной массы сегментов и соотношения масс сегментов. Кроме того, следует подчеркнуть, что предлагаемый подход должен привести к созданию трехмерно сшитого материала, не содержащего специально встроенных жестких блоков, поэтому продукт синтеза должен оказаться меньше подверженным микрофазовому разделению, то есть будет более однородным морфологически. Это должно способствовать улучшенной формуемости изделий на стадии отверждения. При этом достоинства полиуретанов, особенно прочность и сопротивление истиранию, должны сохраниться из-за большого относительного количества уретановых группировок. Возможности для вклада физических сшивок в свойства материала также останутся.

Существенно, что при выбранном способе синтеза сополимеров из олигоорганосилоксанов и органических олигомеров в среде органических растворителей при повышенной температуре образуются регулярно чередующиеся блок-сополимеры с молекулярной массой блоков, эквивалентной средним молекулярным массам олигомеров. Кроме того, реакция поликонденсации удобна тем, что процесс может быть остановлен в любой момент с помощью удаления выделяющегося низкомолекулярного продукта реакции. В рассматриваемом случае это диметиламин, который можно легко удалить из реакционной смеси, тем самым регулируя длину блоков, образующихся в ходе реакции. Поскольку оба исходных компонента синтеза содержат одинаковые функциональные группы, полученный высокомолекулярный сополимер содержит блоки, средняя длина которых зависит как от молекулярной массы олигомеров, так и от соотношения между исходными веществами. Для получения блок-сополимеров с высокой молекулярной массой применялось постепенное дозирование одного из компонентов в зону реакции.

Первым этапом создания новых пространственно сшитых эластомеров являлся синтез эфируретановых и силоксановых форполимеров по специально разработанным методикам.

Процессы синтеза гидроксилсодержащих олигомеров эфируретанов и силоксанов осуществляли в лабораторном реакторе-автоклаве из нержавеющей стали, снабженном мешалкой и рубашкой; реактор был рассчитан на избыточное давление до $5 \cdot 10^5$ Па и соединен с вакуумной и азотной линиями. Для непрерывного контроля вязкости полимеризационной массы автоклав был соединен с замкнутым контуром, снабженным ротационным вискозиметром, через который насосом осуществлялась непрерывная прокачка полимерной массы из автоклава. Показания вискозиметра фиксировались на самописце. Реакцию получения изоцианатсодержащих форполимеров

осуществляли в трехгорлой колбе с мешалкой и термометром. Мономеры перед синтезом подвергались очистке. Во избежание нежелательных реакций гидролиза и гомоконденсации растворители тщательно высушивались.

Процесс получения жидких олигомеров уретанов (простых полиэфиров) осуществлялся в две стадии. На первой получали полиоксипропилентриолы заданной молекулярной массы путем сополимеризации окиси пропилена и низкомолекулярного триола глицерина. Протонодонором, обрывающим процесс роста полимерной цепи, служила вода. Нейтрализация щелочи осуществлялась серной кислотой.

В автоклав подавали инициатор (глицерин) и катализатор (безводный гидроксид натрия NaOH), и смесь нагревали при работающей мешалке до 80–90 °С в токе азота в течение получаса для растворения NaOH в глицерине. Затем температуру в реакторе повышали до 100–110 °С, туда подавали окись пропилена и создавали давление сухого азота порядка $(1,5–2)\cdot10^5$ Па. Соотношение компонентов (в массовых частях) было следующим: окись пропилена – 100, глицерина – 10, безводного гидрооксида натрия – 0,5.

На этой стадии реакция продолжалась до тех пор, пока не была достигнута заданная вязкость полимеризационной массы, которая регистрировалась в проточном вискозиметре и фиксировалась на самописце. После этого подавался протонодонор, обрывающий рост полимерных цепей. Оставшаяся (незаполимеризовавшаяся) окись пропилена, глицерин и пузырьки азота отгонялись под вакуумом при этой же температуре в течение одного часа. Затем в автоклав подавали серную кислоту для нейтрализации щелочи при перемешивании в течение получаса до нейтральной реакции (по pH-метру).

Присутствие в процессе полимеризации глицерина обеспечивает прививку к основной полимерной цепи боковой первичной гидроксильной группы, дающей возможность в дальнейшем при осуществлении реакции уретанообразования получить химический узел пространственной сетки. Глицерин берется заведомо с избытком из расчета необходимого присутствия одного радикала глицерина на полимерную цепь с максимальной молекулярной массой приблизительно 6000 Да, в количестве примерно 90 г, то есть приблизительно 10 % масс. от массы мономера. Избыток глицерина, не вошедшего в полимерную цепь, удаляется после завершения полимеризации вакуумированием.

Полученный полиоксипропилентриол подвергают очистке от возможных примесей (остатков мономера, катализатора, инициатора и т. п.) методом переосаждения этанолом из раствора в толуоле.

Вторая стадия изготовления лабораторных образцов новых видов жидких олигомерных полиуретанов состояла в получении олигомерных полиоксипропилендиизоцианатов (форполимеров) на основе синтезированных на первой стадии полиоксипропилентриолов по реакции полиоксипропиленов с толуилендиизоцианатом (см. схему 1).

В трехгорлую колбу с мешалкой и термометром загружают необходимое количество полученного ранее гидроксилсодержащего полиэфирного олигомера. При перемешивании и температуре 95–105 °С под вакуумом производится сушка олигомера в течение 1,5 ч до содержания влаги в нем не более 0,005 % масс., определяемого по методу Фишера. Для ускорения реакции изоцианата с гидроксилом добавляется оловоорганический катализатор дибутилдилаурат олова в количестве 0,05–0,10 % масс. от общего веса реакционной массы.

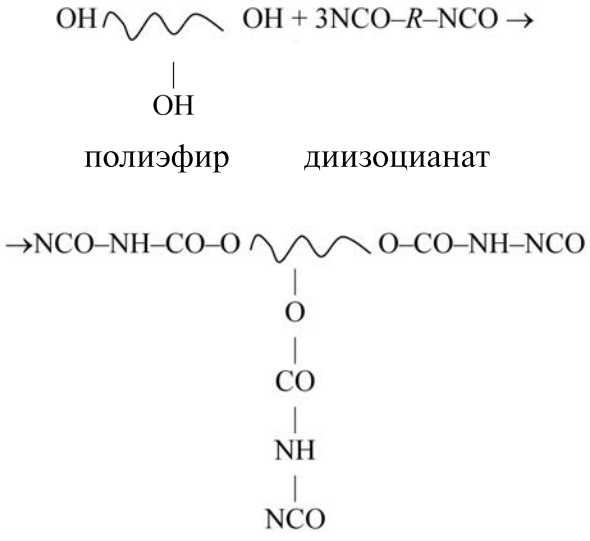


Схема 1

По окончании процесса сушки содержимое колбы охлаждают до 55–60 °С, и в нее подается расчетное количество мономерного толуилендиизоцианата Т-80. Дозировку диизоцианата рассчитывают исходя из соотношения 1 моль диизоцианата на 1 моль-эквивалент гидроксила. Синтез проводится при 50–60 °С в атмосфере сухого азота в течение 2–4 ч до достижения расчетного содержания NCO-групп. Отбор проб на анализ производится каждые полчаса.

Процесс получения образцов жидких олигомеров силоксанов также состоит из двух стадий.

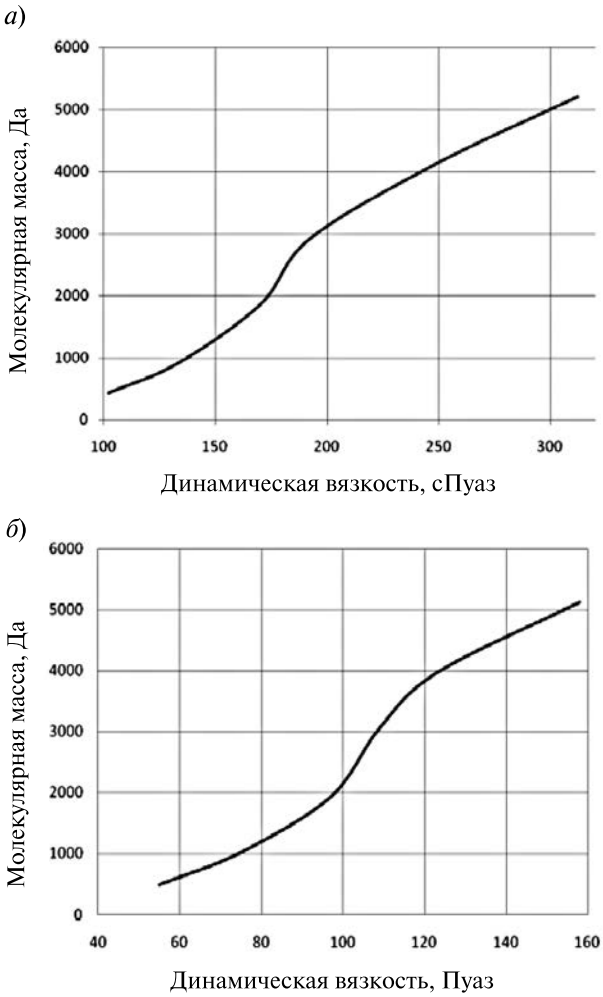
На первой стадии осуществляется получение жидких низкомолекулярных полисилоксанов заданной молекулярной массы с концевыми гидроксильными группами путем полимеризации октаметилциклосилоксана. Процесс ведется аналогично процессу синтеза гидроксилсодержащих эфируретанов.

Вторая стадия изготовления жидких олигомерных силоксанов состояла в получении уретансодержащих олигомеров (форполимеров) с концевыми изоцианатными группами путем обработки гидроксилсодержащих олигомеров силоксанов толуилендиизоцианатом (см. схему 2).

Химизм процесса аналогичен описанному выше для процесса синтеза изоцианатсодержащих эфируретанов.

Перед началом синтеза гидроксилсодержащих олигомеров предварительно устанавливалась взаимосвязь между вязкостью полимеризата и молекулярной массой получающихся олигомеров. Для этого в процессе проведения полимеризации через каждые 15 минут из реактора отбирались пробы полимеризата, для которых уже зафиксирована вязкость и в которые сразу же добавлялся протонодонор для прекращения роста полимерной цепи. После вакуумирования с целью удаления остатков незаполимеризовавшегося мономера, катализатора и пузырьков воздуха методом эбулиоскопии определялась молекулярная масса олигомера в каждой отобранной пробе. Зависимость молекулярной массы олигомеров от вязкости полимеризационной смеси представлена на рисунке. Данные зависимости использовались для определения момента достижения заданной молекулярной массы олигомеров при синтезе.

Было изготовлено по шесть образцов жидких олигомерных изоцианатсодержащих уретанов и силоксанов, которые охарактеризованы по следующим показателям: молекулярной массе (методом эбулиоскопии), содержанию изоцианатных групп (методом аминного эквивалента), динамической вязкости (применением вискозиметра Гепплера).



Зависимости молекулярной массы олигооксипропилентриолов (*а*) и олигосилоксандиолов (*б*) от динамической вязкости полимеризационной смеси

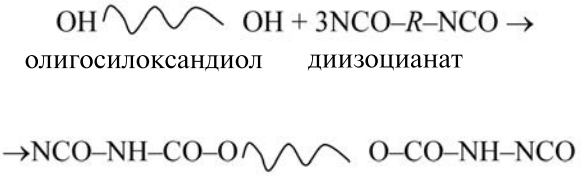


Схема 2

Задача следующего этапа работы – получение полимеров, состоящих из линейных молекул, образованных химически связанными, регулярно расположенными сегментами олигоэфируретана и олигосилоксануретана; последние соединены между собой поперечной пространственной химической сеткой, образованной за счет использования трифункционального полиэфируретана и трифункциональных отвердителей. Эти отвердители одновременно выступают как в роли удлинителя цепи, так и сшивающего агента. Полученные таким образом эластомеры представляют собой трехмерно сшитые сополимеры.

Проведено исследование величины, которой может достигать молекулярная масса линейных регулярных сополимеров полиэфируретанов и полисилоксануретанов в процессе удлинения молекулярной цепи в сочетании с поперечным химическим сшиванием при получении разрабатываемых эластомеров. Для этого были изготовлены жидкие полиуретансилоксановые композиции, состоящие из олигооксипропилендиолдиизоцианатов и олигосилоксандиизоцианатов. Для отверждения таких композиций в дальнейшем использовали бифункциональный 1,4-бутандиол. Было приготовлено восемь образцов жидких полимерных полиэфир-полисилоксануретановых композиций различного химического состава. Показано, что независимо от молекулярной массы полиэфирных и полисилоксановых сегментов и их массового соотношения в составе жидкой композиции рост линейной цепи сополимеров происходит до приблизительно одинакового молекулярного веса – в пределах 50–57 000 Да.

Поскольку в новых трехмерно сшитых эластомерах образование трехмерной сетки связей предполагается за счет использования в качестве удлинителя цепи и отверждающего агента трехфункционального реагента (триола – глицерина), то на основании механизма процесса получения эластомеров и данных о молекулярной массе линейных сополимерных цепей можно предположить, что длина линейных полимерных цепей в новых сшитых эластомерах для имплантатов будет близкой к длине цепей линейных сополимеров. Таким образом, молекулярная масса линейных цепей в сшитых сополимерах эфируретанов и силоксанов ожидается в пределах 50–60 000 Да.

Был проведен экспериментальный подбор наиболее подходящего типа отверждающей системы для разработанных жидких уретан-силоксановых композиций.

Для подбора оптимального типа отверждающей системы были синтезированы шесть образцов эластомеров с использованием в качестве отверждающих агентов наиболее широко применяемых в производстве полиуретанов глицерина, триметилолпропана и триэтаноламина (триолы) и толуилендиамина, гексаметилендиамина и метилен-бис-*о*-хлоранилина (диамины). Эластомеры были получены при отверждении указанными материалами смеси (80 : 20 по массе) полиоксипропилентриизоцианата молекулярной массы 5370 Да и полисилоксанового олигомера (полиметилсилоксандиизоцианата). Отверждение триолами осуществлялось при соотношении количества уретановых и гидроксильных групп (NCO : OH), равном 1 : 1. При получении твердых полиуретансилоксановых эластомеров с применением 2,4-метилен-бис-*о*-хлоранилина использовалось среднее значение соотношения количества уретановых и аминных групп (NCO : NH_2), равное 1,3.

Из жидких смесей изоцианатсодержащих олигомеров с отвердителями отливались пластинки во фторопластовых формах, после отверждения в течение двух суток при комнатной температуре из пластинок вырубались образцы, для которых проводилось определение первичных физико-механических показателей – прочности и относительного удлинения при разрыве. Анализ этих показателей позволил заключить, что применение диаминов в качестве отвердителя, способствующее введению в структуру полимера мочевинных и биуретовых групп, более высококогезионных по сравнению с уретановыми (образуемыми за счет триолов), обеспечивает более высокие прочностные показатели эластомеров по сравнению с полученными с триольным отвердителем. Из трех использованных диаминов в ряду гексаметилендиамин – 1,2-толуилендиамин – метилен-бис-*о*-хлоранилин наибольшую прочность эластомерам придает последний, что связано с наибольшим содержанием в этом эластомере высококогезионных ароматических ядер.

Из трех триолов в ряду глицерин – триметилпропан – триэтаноламин наиболее высокие

значения прочности эластомеров достигаются при использовании триэтаноламина, что, возможно, объясняется тем, что третичный амин катализирует тримеризацию изоцианатных групп; это способствует образованию дополнительных узлов пространственной сетки. Более низкие показатели прочности эластомеров, отвержденных триметилолпропаном, связаны, вероятно, со стерическими препятствиями боковых метильных групп отвердителя в реализации межмолекулярных взаимодействий.

На основании полученных экспериментальных данных при синтезе образцов полиэфируретансилоксановых эластомеров в качестве отвердителей были использованы триэтаноламин и метилен-бис-*о*-хлоранилин.

При изготовлении образцов отвержденных эфируретансилоксановых эластомеров использовались синтезированные в ходе выполнения работы полиоксипропилентриизоцианаты (олигомерные полиуретаны с концевыми NCO-группами) и полиуретансилоксаны (олигомерные полисилоксаны с концевыми NCO-группами) примерно одинаковой молекулярной массы. Для обеспечения оптимальной (с нашей точки зрения) плотности пространственной сетки твердых эластомеров молекулярная масса синтезированных полиэфирных и полисилоксановых олигомеров была относительно низкой (в пределах от 1000 до 5000 Да).

Изготовлено 12 образцов отвержденных полиэфируретансилоксановых эластомеров, различающихся молекулярной массой входящих в его состав полиэфируретановых и полисилоксановых звеньев, массовым соотношением этих звеньев, а также типом отверждающего агента (см. таблицу).

Как следует из данных таблицы, метод использования олигомерных полисилоксанов и полиоксипропилентриолов примерно одинаковой массы, как и предполагалось, позволяет получать пространственно сшитые материалы с регулируемой частотой их пространственной сетки. Предложенный метод был направлен на получение эластомеров с регулярным расположением сегментов различной химической природы в молекулярной цепи, а также на варьирование массового соотношения этих сегментов, использование полиэфируретанов и трехфункциональных отвердителей.

Характеристики образцов отвержденных полиэфируретансилоксановых сополимеров

№ образца	Отвердитель	Соотношение масс ПЭ : ПС	Молекулярная масса, Да		Расчетная M_c, Да/узел
			ПЭ звена	ПС звена	
1	Триол	80/20	872	1330	1200
2		50/50			1350
3	Диамин	80/20			1380
4		50/50			1450
5	Триол	80/20	2543	2470	1800
6		50/50			2050
7	Диамин	80/20			2100
8		50/50			2300
9	Триол	80/20	5730	5650	5400
10		50/50			6750

ПЭ, ПС – полиэфируретановые и полисилоксановые звенья полимерной цепи;

M_c – удельная молекулярная масса, приходящаяся на один узел разветвления (или на одну поперечную связь).

Применение диамина в качестве отверждающего агента, как и следовало ожидать, приводит к получению материалов с бóльшими значениями расчетной M_c по сравнению с таковыми для образцов с использованием триола (при равных значениях молекулярной массы полиэфирных и полисилоксановых сегментов и их массового соотношения). Это связано с тем, что диамин в большей степени выступает в роли удлинителя полимерной цепи и в меньшей степени – в качестве агента образования биуретовых химических узлов пространственной сетки (при взаимодействии мочевинных групп с изоцианатными при дозировке диамина в количестве, меньшем эквимолярного).

Таким образом, синтезированы новые пространственно сшитые сегментированные полиэфируретансилоксановые эластомеры с регулируемой густотой пространственной сетки связей. Проведение дальнейших исследовательских испытаний физико-механических характеристик синтезированных твердых эластичных полиэфируретансилоксановых материалов позволит выявить их оптимальный состав для изготовления определенных видов медицинских имплантатов.

Статья подготовлена по результатам НИР «Разработка методов создания полиуретановосилоксановых эластомеров для имплантатов нового поколения с повышенной прочностью и долговечностью» по второму этапу выполнения Государственного контракта от 12 апреля 2011 г. № 16.513.11.3049. в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса на 2007–2013 годы»

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ward, R.S.**. Thermoplastic silicone-urethane copolymers: a new class of biomedical elastomers [Электронный ресурс]: / R.S. Ward // Medical device and diagnostic industry magazine. – 2000. Режим доступа: http://www.mddionline.com/article/

2. **Штильман, М.И.** Полимеры медико-биологического назначения [Текст] / М.И. Штильман // Высокомолек. соед. Сер. А. – 2010. – Т. 52. – № 9. – С. 1551–1569.

3. **Райгородский, И.М.** Полиоргано-полисилоксановые сополимеры [Текст] / И.М. Райгородский, В.С. Рабкин, В.В. Киреев. // Высокомолек. соед. Сер А. – 1995. – Т. 37.– № 3. – С. 445–469.

4. **Макарова, Л.И.** Синтез и свойства силоксан(этиленоксид)-уретановых блок-сополимеров [Текст] / Л.И. Макарова, Л.В. Филимонова, Л.В. Дубровина [и др.] // Высокомолек. соед. Сер.Б. –2010. – Т. 52. – № 6. – С. 1050–1056.

5. Силоксановые каучуки медицинского назначения [Электронный ресурс] // Режим доступа: http://www.fgupniisk.ru/siloksanovie-kauchuki/medicinskie-polimery/

6. **Энтелис, С.Г.** Реакционноспособные олигомеры [Текст] / С.Г. Энтелис, В.В. Евреинов, А.И. Кузаев. – М., Химия. –1985. – 303 с.

УДК 517.9

М.Р. Петриченко, Д.В. Серов

ТИПИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КРОККО

При исследовании вязких течений, теплопередачи, фильтрации часто возникает необходимость решения предельных задач для уравнения Луиджи Крокко (L. Crocco).

Уравнение (точнее метод) Крокко возникает в простых предельных задачах для одномерных уравнений параболического типа [1].

Например, пусть

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)=\frac{\partial\eta}{\partial\xi},\ \ f(\eta)\ge 0,$$
$$\eta(0,\,\tau)=\eta(\xi,\,0)-1=0.$$

Область определения искомой функции $\eta(\xi, \tau)$ – это полуполоса Ω:

$$D(\eta)=\Omega(\xi,\,\tau:\ 0<\xi<\infty,\,\tau>0),\ \eta\in C^{(1)}(\Omega).$$

Замена переменных

$$\eta(\xi,\,\tau)=\eta(\zeta),\ \ \zeta:=\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}},\ \ \varsigma\in(0,\,\infty)$$

приводит уравнение с частными производными и предельные условия к виду

$$f(\eta)\eta''+f'(\eta)\eta'^{2}+2\zeta\cdot\eta'=0,$$
$$\eta(0)=\eta(\infty)-1=0.$$

Замена же переменных $\frac{d\eta}{d\zeta}=j(\eta)$ линеаризует предыдущее уравнение и понижает порядок на единицу:

$$\frac{d}{d\eta}\left(f(\eta)j\right)=-2\zeta(\eta),\ f(\eta)j=2\int_{\eta}^{1}\zeta(z)dz\ .$$

Функция $\phi(\eta):=\int_{\eta}^{1}\zeta(z)dz$, очевидно, удовлетворяет такому уравнению и таким однородным предельным условиям:

$$2\phi\phi''+f(\eta)=0,\ \ \phi'(0)=\phi(1)=0\ . \qquad (1)$$

Интегрирование по частям в левой части уравнения (1) приводит к интегральному тождеству:

$$\int_{0}^{1}\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^{2}d\eta=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}f(\eta)d\eta. \qquad (2)$$

Это тождество выражает закон сохранения для потоков. В силу неравенства Коши

$$\phi(0)\le\sqrt{\frac{1}{2}\int_{0}^{1}f(\eta)d\eta}. \qquad (2a)$$

Очевидно, что уравнение (1) равносильно системе двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\phi}{d\eta}=\psi;$$
$$\frac{d\psi}{d\eta}=-\frac{f(\eta)}{2\phi} \qquad (1a)$$

с гамильтонианом (энергией фазового потока)

$$E(\phi,\,\psi)=\psi^{2}+f(\eta)\ln\phi.$$

Пусть $f''(\eta)>0$, $f(0)=0$. Тогда если $0\le\phi\le 1$, то на траекториях потока $\frac{dE}{d\eta}=\frac{\partial E}{\partial\eta}<0$. Иначе

говоря, в этом случае фазовый поток диссипативен, энергия $E(\phi, \psi)$ убывает вдоль траектории действительного потока. Легко видеть, что действительная траектория погружена в полуполосу

$$\Pi = \left(\phi, \psi:\ 0 < \phi < \phi_0 < 1,\ \psi < 0\right), \quad \phi_0 := \phi(0).$$

Траектория начинается в точке $(\phi_0, 0)$ и асимптотически приближается к абсциссе $\phi = 0$. Очевидно, что

$$E(\phi_0,\ 0) = 0,\ E(\phi,\ \psi) \underset{\phi \to 0}{\to} -\infty.$$

Граница $(\phi_0, 0)$ полуполосы Π состоит из точек $(\phi_\Delta, 0)$, отвечающих условиям Коши для уравнения (1):

$$\phi'(\Delta) = \phi(\Delta) - \phi_\Delta = 0,$$

таким, что $\phi(1) = 0$ (в гидравлической теории фильтрации для таких решений используется термин «разрывные решения» и величина $\Delta > 0$ трактуется как «промежуток высачивания»). На этих решениях, очевидно, $0 > \Psi_\Delta > \Psi_0$.

Получается, что траектории разрывных решений «короче» траекторий предельной задачи (1): первые располагаются ближе к асимптоте $\phi = 0$, чем вторые.

Действительные решения предельной задачи (1) удовлетворяют условию

$$S(\phi) = \int_0^1 \left(\left(\frac{d\phi}{d\eta} \right)^2 + f(\eta) \ln \phi^{-1} \right) d\eta \to \inf \geq 0. \quad (3)$$

Следовательно, допустимое множество решений совпадает с $W_2^{(1)}(0,1)$. Решение (1) определяется в существенно более сильной топологии $C^{(2)}(0, 1)$. Это справедливо и для разрывных решений.

Необходимость слабого минимума действия (основной функции потока (поля)) $S(\phi)$ на траекториях потока гарантируется условием Лежандра.

Утверждение. *Пусть $\phi(\eta)$ – решение предельной задачи (1), $f(\eta) > 0$ в промежутке $0 < \eta < 1$, $\phi_0 := \phi(0)$. Тогда в промежутке $0 < \eta < 1$ возможны два случая: нет нулей производной $\phi(\eta)$; нет нулей $\phi(\eta)$.*

Следовательно, в промежутке $0 < \eta < 1$ нет точек, сопряженных с концами промежутка (0, 1) относительно предельной задачи (1) и $0 < \phi(\eta) < \phi_0$. Поэтому, во-первых, функция ϕ: $(0, 1) \to (0, \phi_0)$ однолистная и выпуклая; во-вторых, на действительных траекториях потока (ϕ, ψ) функция $S(\phi)$ достигает минимума.

Учитывая тождество (2), можно переписать условие (3) следующим образом:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\phi^{-1}\right) \right) f(\eta) d\eta \to \inf \geq 0. \quad (3a)$$

Следовательно, на действительных траекториях потока действие $S(\phi)$ достигает локального слабого минимума. При этом $\ln(\phi^{-1})$ в среднем наименее отклоняется от значения 0,5 с весом $f(\eta)$ на промежутке (0, 1).

Например, $\phi(\eta) = a\left(1 - \eta^m\right)$ доставляет минимум условия (3), если

$$a = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2m-1}{2}}\ \|f\|, \quad \|f\| := \int_0^1 f d\eta \geq 0.$$

Формальное понижение порядка (1) получается подстановкой

$$\psi := \frac{d\phi}{d\eta} = \psi(\eta).$$

Следовательно,

$$\frac{d\psi^2}{d \ln \phi} + f(\eta) = 0$$

и тогда

$$\psi = -\sqrt{\int_\phi^{\phi_0} f\left(\eta(\omega)\right) d \ln \omega}. \quad (4)$$

К интегралу справа применяется теорема о среднем в форме Бонне [2]. Действительно, в силу положительности и монотонности функции $f(\eta)$ формулу (4) можно переписать в следующем виде:

$$\psi = -\sqrt{f(\eta) \ln \frac{\phi^*}{\phi} + f(0) \ln \frac{\phi_0}{\phi^*}}, \quad (4a)$$

где $0 < \phi < \phi^* < \phi_0$.

Но функция $f(\eta)$ монотонно убывает в каждом из частичных интервалов (ϕ, ϕ^*) и (ϕ^*, ϕ_0). Поэтому, если принять $\phi^* = \frac{\phi + \phi_0}{2}$, то можно получить в силу выражения (4a) следующее выражение для обобщенного импульса $\psi(\eta)$:

$$\psi = -\sqrt{f(\eta)\ln\frac{\phi^*}{\phi}} = -\sqrt{f(\eta)\ln\frac{\phi_0+\phi}{2\phi}}. \quad (4б)$$

Если $f(\eta) = 1$ – постоянная (перенос теплоты в твердом теле), то, в силу выражений (4) и (4а) получаем формулу

$$\psi = -\sqrt{\ln\frac{\phi_0}{\phi}}.$$

Тогда справедливо выражение

$$\eta = \phi_0 \int\limits_{\frac{\phi}{\phi_0}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1}{t}}} = \phi_0\Gamma\left(\frac{1}{2},\ \ln\frac{\phi_0}{\phi}\right), \quad (5)$$

где $\Gamma\left(\frac{1}{2},\ a\right) := \int\limits_0^a \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du$ – неполная гамма-функция.

Пусть $\phi = 0$. Тогда $\eta = 1$, $\phi_0 = (1/\pi)^{1/2}$. Следовательно, в силу выражения (5) траектория потока допускает параметрическое представление:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2},\ \ln\frac{\phi_0}{\phi}\right),\ \ \zeta = \sqrt{\ln\frac{\phi_0}{\phi}}.$$

Величина ϕ_0 связана со скоростью переноса (диффузии или дисперсии) на границе $\varsigma = 0$: $\phi_0 = 1/2f(0)j(0)$, $j(0)$ – скорость диффузии (дисперсии) на границе.

Если на границе $\eta = 0$, то величина скорости диффузии уже задана. Если же $0 < \Delta < \eta < 1$, $\phi(\Delta) = \phi_\Delta$, то очевидно, что $\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)_{\eta=\Delta} = 0$ и в силу выражения (5) выполняется равенство

$$\eta - \Delta = \phi_\Delta\Gamma\left(\frac{1}{2},\ \ln\frac{\phi_\Delta}{\phi}\right). \quad (5а)$$

Пусть $\phi = 0$. Тогда $\eta = 1$, и в силу равенства (5а) можно записать выражение

$$1 - \Delta = \frac{\phi_\Delta}{\phi_0},\ \ \phi_0 < \phi_\Delta < 1. \quad (6)$$

В задачах переноса параметр Δ трактуется как разрыв непрерывности на границе диффузионного потенциала η на границе $\varsigma = 0$. Если $\phi(0) = \phi_0$, то разрыва непрерывности нет, $\Delta = 0$, скорость диффузии максимальна. Для переноса теплоты ($f(\eta) = 1$) разрыва непрерывности диффузионного потенциала η нет ни при каком значении $\Delta \geq 0$. Дело в том, что скорость диффузии $j(0)$ ограничена при любом значении Δ. Иная ситуация возникает, если $|f'(\eta)| > 0,\ 0 \leq \Delta < \eta < 1$, например $f(\eta) = \eta^m$ (в задачах так называемой «гидравлической теории фильтрации» $m = 1$). Здесь $j(\eta) \underset{\eta\to 0}{\to} \infty$ и существование Δ необходимо. Точнее, если скорость диффузии на границе конечна и равна j_0, то существует $\Delta > 0$ такая, что

$$j_0 = j(\Delta) = \frac{2\phi_\Delta}{\Delta^m} < \infty.$$

Предельная задача (1) ставится следующим образом:

$$2\phi\phi'' + \eta^m = 0,\ \ \Delta < \eta < 1,\ \ \phi'(\Delta) = \phi(1) = 0, \quad (1б)$$

причем $m > -2$.

Отсюда следует, что в силу выражения (4б) справедливы тождества

$$\int\limits_\Delta^\eta \sqrt{f(\eta)}d\eta = \phi_\Delta \int\limits_{\frac{\phi}{\phi_\Delta}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1+t}{2t}}};$$

$$\int\limits_\Delta^1 \sqrt{f(\eta)}d\eta = \phi_\Delta \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1+t}{2t}}}; \quad (7)$$

$$\int\limits_0^1 \sqrt{f(\eta)}d\eta = \phi_0 \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1+t}{2t}}}.$$

В данном случае, сравнивая две последние формулы системы (7), легко получить:

$$1 - \Delta^{\frac{m+2}{2}} = \frac{\phi_\Delta}{\phi_0};$$

$$\Delta = \left(1 - \frac{\phi_\Delta}{\phi_0}\right)^{\frac{2}{m+2}}; \quad (6а)$$

$$\phi_\Delta = \frac{\int\limits_\Delta^1 \sqrt{f(\eta)}d\eta}{\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1+t}{2t}}}};\ \ \phi_0 = \frac{\int\limits_0^1 \sqrt{f(\eta)}d\eta}{\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1+t}{2t}}}}.$$

В данном случае можно записать

$$\phi_0 = \frac{2}{(m+2)\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1+t}{2t}}}};\quad \phi_\Delta = \frac{2}{m+2}\frac{1-\Delta^{\frac{m+2}{2}}}{\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1+t}{2t}}}}. \quad (8)$$

В силу выражений (6а) и (8) дробь $\beta = \frac{\phi_\Delta}{\phi_0}$ при любой $\Delta \geq 0$ является правильной.

Интеграл в знаменателе (8) допускает следующую асимптотическую оценку:

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1+t}{2t}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}}{2^k} \cong$$

$$\cong \frac{\pi}{2(\ln 2)^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}(\ln 2)^{\frac{2k+1}{2}}}{(2k+1)!!}\right).$$

Тогда справедливы разложения

$$\phi_0 = \frac{4}{\pi}\frac{(\ln 2)^{3/2}}{m+2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}(\ln 2)^{\frac{2k+1}{2}}}{(2k+1)!!}\right)^{-1};$$

$$\phi_\Delta = \frac{4\left(1-\Delta^{\frac{m+2}{2}}\right)}{\pi}\frac{(\ln 2)^{3/2}}{m+2}\times \quad (8a)$$

$$\times\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}(\ln 2)^{\frac{2k+1}{2}}}{(2k+1)!!}\right)^{-1}.$$

Очевидно, что в формулах (8а) ряд справа представляет целую функцию ограниченного роста (порядка не больше 1) на расширенной вещественной оси.

Подведение итогов

Доказаны следующие леммы.

Лемма 1. *Предельная задача для уравнения Крокко $\phi'(\Delta) = \phi(1) = 0$ на промежутке $\Delta < \eta < 1$ равносильна задаче Коши $\phi(\Delta) - \phi_\Delta = \phi'(\Delta) = 0$. Точек, сопряженных с точкой $\eta = \Delta$, на промежутке $\Delta < \eta < 1$ нет, поэтому для $\forall\Delta \in [0, 1]$, $\exists\phi(\Delta) = \phi_\Delta \Rightarrow \phi'(\Delta) = \phi(1) = 0$.*

Другими словами, монотонное решение предельной задачи получается из решения задачи Коши с параметром ϕ_Δ. Величина $\phi(\Delta) := \phi_\Delta$ в задачах для уравнения параболического типа связана с интенсивностью переноса в точке $\varsigma = 0$ (на плоскости $\xi = 0$). Именно, величина $\phi(\Delta) := \phi_\Delta$, отвечающая значению потенциала переноса $\eta = \Delta$ в точке $\varsigma = 0$, пропорциональна скорости переноса (градиенту потенциала переноса) в точке $\varsigma = 0$. Оказывается, если $f(0) = 0$, то точка $\varsigma = 0$ «заперта» относительно градиента переноса, и для конечности градиента переноса необходимо, чтобы скорость переноса была бесконечно велика. Величина Δ позволяет срезать бесконечно большую скорость переноса $j(0)$.

Лемма 2. *Если $f(\eta)$ – монотонно убывающая в промежутке (ϕ, ϕ_0) положительная функция, то*

$$\frac{d\phi}{d\eta} = -\sqrt{f(\eta)\ln\frac{1+t}{2t}},\quad t := \frac{\phi}{\phi_\Delta},\quad 0 < t < 1,\ \forall\Delta \geq 0,$$

и тогда

$$\phi_\Delta \int\limits_{\frac{\phi}{\phi_\Delta}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1+t}{2t}}} = \int\limits_\Delta^\eta \sqrt{f(z)}dz.$$

Последовательно проводятся следующие вычисления

1. Уравнение интегральной кривой предельной задачи:

$$\frac{\int\limits_\Delta^\eta \sqrt{f(z)}dz}{\int\limits_\Delta^1 \sqrt{f(z)}dz} = \frac{\int\limits_{\frac{\phi}{\phi_\Delta}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1+t}{2t}}}}{\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1+t}{2t}}}} = \Psi\left(\frac{\phi}{\phi_\Delta}\right);$$

$$\Psi(0) - 1 = \Psi(1) = 0,$$

где $\int\limits_{\frac{\phi}{\phi_\Delta}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1+t}{2t}}} = \Gamma\left(\frac{1}{2},\ \ln\frac{\phi_\Delta + \phi}{2\phi}\right);\ \Gamma\left(\frac{1}{2},\ a\right) :=$

$= \int\limits_0^a \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du$ – неполная гамма-функция.

2. Предельные значения $\phi(\eta)$:

$$\phi_\Delta := \phi(\Delta) = \frac{\int_\Delta^1 \sqrt{f(z)}dz}{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{1+t}{2t}}}}.$$

3. Величина разрыва Δ как функция предельных значений $\phi(\eta)$ имеет вид

$$\phi := \frac{\phi_\Delta}{\phi_0} = \frac{\int_\Delta^1 \sqrt{f(\eta)}d\eta}{\int_0^1 \sqrt{f(\eta)}d\eta}.$$

Лемма 3. *Если $f(\eta)$ – монотонно возрастающая в промежутке $(\phi,\ \phi_0)$ положительная функция, то справедливо тождество*

$$\frac{d\phi}{d\eta} = -\sqrt{f(\Delta)\ln\frac{2}{1+t}};\quad t := \frac{\phi}{\phi_\Delta};\quad 0 < t < 1,\ \forall\Delta \ge 0$$

и тогда

$$\phi_\Delta \int_{\frac{\phi}{\phi_\Delta}}^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{2}{1+t}}} = \sqrt{f(\Delta)}(\eta - \Delta).$$

Проводятся следующие вычисления.

1. Уравнение интегральной кривой предельной задачи:

$$\frac{\eta-\Delta}{1-\Delta} = \frac{\int_{\frac{\phi}{\phi_\Delta}}^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{2}{1+t}}}}{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{2}{1+t}}}} = \Psi\left(\frac{\phi}{\phi_\Delta}\right);$$

$$\Psi(0) - 1 = \Psi(1) = 0,$$

где $\int_{\frac{\phi}{\phi_\Delta}}^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{2}{1+t}}} == 2\Gamma\left(\frac{1}{2},\ \ln\frac{2\phi_\Delta}{\phi+\phi_\Delta}\right)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2},\ a\right) :=$

$:= \int_0^a \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du$ – неполная гамма-функция.

2. Предельные значения $\phi(\eta)$:

$$\phi_\Delta := \phi(\Delta) = \frac{\sqrt{f(\Delta)}(1-\Delta)}{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\ln\frac{2}{1+t}}}}.$$

3. Величина разрыва Δ как функция предельных значений $\phi(\eta)$ имеет вид

$$\phi := \frac{\phi_\Delta}{\phi_0} = \sqrt{\frac{f(\Delta)}{f(0)}}(1-\Delta).$$

Таким образом, в результате решения предельных задач для уравнения Крокко установлена необходимость существования промежутка $0 < \eta < \Delta$, $\zeta = 0$, обусловленная неограниченным ростом интенсивности переноса при $\eta \to 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Полянин, А.Д.** Справочник по нелинейным уравнениям математической физики [Текст] / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.

2. **Уиттекер, Э.Т.** Курс современного анализа [Текст]. В 2 ч. Ч. 1. Основные операции анализа / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. – М.: Физматгиз, 1963. – 326 с.

УДК 517.929

В.И. Зубов, С.В. Зубов, М.В. Стрекопытова, И.С. Стрекопытов

ЗАДАЧА О ПОСТРОЕНИИ УПРАВЛЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

При компьютерном моделировании динамики управляемых систем чрезвычайно важным является вопрос о том, как исследовать поведение системы при различных начальных данных. Можно, естественно, применять численное интегрирование для различных наборов указанных данных, принадлежащих некоторому множеству. Такой путь приводит к значительным и даже неограниченным вычислительным затратам. В связи с этим возникает вопрос, как предварительно вычислив некоторый фиксированный набор решений, сделать выводы о поведении целого множества решений, множество начальных данных которых представляет компактное множество.

Рассмотрим управляемую механическую голономную систему, описываемую системой уравнений Лагранжа 1-го рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}= \\ =Q_j(q_1,...,q_k,\dot{q}_1,...,\dot{q}_k,t)+\sum_{i=1}^{k}B_{ji}u_i, \tag{1}$$

где $j=1,2,...,k, q_1,...,q_k$ – обобщенные координаты системы; $\dot{q}_1,...,\dot{q}_k$ – обобщенные скорости; T – кинетическая энергия; $k\times k$ – матрица $B=\{B_{ij}\}$, которая является неособенной; $U=(u_1,...,u_k)^*$ представляет собой вектор управлений [1].

Постановка задачи

Поставим задачу о построении управлений U таким образом, чтобы система (1) имела асимптотически устойчивое интегральное многообразие

$$\dot{q}=\eta(q,t). \tag{2}$$

Здесь и далее вектор обобщенных координат $(q_1,...,q_k)^*$ мы будем обозначать как q, а вектор обобщенных скоростей $(\dot{q}_1,...,\dot{q}_k)^*-\dot{q}$. Вектор обобщенных сил $(Q_1,...,Q_k)^*$ обозначим как Q.

Кинетическая энергия T системы (1) определяется соотношением

$$r=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\dot{r}_i^2}{2},$$

где n – число точек системы, m_i – масса i-й точки, r_i – радиус-вектор этой точки в правой декартовой системе координат O_{xyz} [2].

Мы будем считать, что в общем случае система подчинена реономным связям $r_i=r_i(q,t)$. Тогда кинетическая энергия представима в виде

$$r=r_2+r_1+r_0,$$

где $r_2=\dot{q}^*A(q,t)\dot{q}$ – квадратичная форма обобщенных скоростей $\dot{q}_1,...,\dot{q}_k$, $r_1=\sum_{i=1}^{k}a_i(q,t)\dot{q}_i$ – линейная форма обобщенных скоростей; r_0 представляет собой члены, не зависящие от величин $\dot{q}_1,...,\dot{q}_k$. Заметим, что если связи являются стационарными, т. е. $r_i=r_i(q)$, то $T=T_2$ [3].

Перепишем уравнение (1) в форме Гамильтона:

$$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j};\quad \dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial p_j}+Q_j+ \\ +\sum_{i=1}^{k}B_{ji}u_i;\quad j=1,2,...,k, \tag{3}$$

где величины $p_1,...,p_k$ называются обобщенными импульсами и определяются соотношениями

$$p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}; \tag{4}$$

функция H определяется соотношением

$$H=\sum_{i=1}^{k}p_i\dot{q}_i-T.$$

В последнем соотношении заменим обобщенные скорости $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_k$ на величины $f_j(p,q,t)$, получаемые из уравнений (4) при решении их относительно величин $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_k$. Таким образом мы получим функцию H в виде $H = H(t,q,p)$ [4]. Заметим, что, задавая многообразие (2), мы тем самым задаем импульсы для системы (4):

$$p_j = \pi_j(t,q). \qquad (5)$$

Таким образом, задача сводится к построению управлений, обеспечивающих движение с заданным импульсом.

При условии существования многообразия (5) у системы (3) выполнено соотношение

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \pi_j}{\partial q_i}\eta_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_j + \sum_{i=1}^{k} B_{ji}u_i \,.$$

Положим [5], что

$$U_0 = B^{-1}\left(\frac{\partial H(t,q,\pi)}{\partial q} - Q + \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\partial \pi}{\partial q}\eta\right); \qquad (6)$$

$$U = U_0 - k(p-\pi)\,. \qquad (7)$$

Параметр k будем называть коэффициентом усиления. Подставим уравнение (7) в систему (3), тогда получим следующие соотношения:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p};\;\; \dot{p} = \dot{\pi} - k(p-\pi). \qquad (8)$$

Система (5) имеет при $k > 0$ устойчивое интегральное многообразие (8), определяемое соотношениями (2). Для доказательства этого факта достаточно продифференцировать положительно определенную функцию Ляпунова $V = (p-\pi)^2$ в силу системы (8) [6]. Мы получим, что производная этой функции является отрицательной величиной при $k > 0$. Тем самым и доказывается асимптотическая устойчивость системы (8) по отношению к величине $p - \pi$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Квадратичная форма $T^{(2)}$ значений $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_m$ имеет положительно определенную матрицу A, равномерно ограниченную в окрестности*

$$q_1 = q_2 = ... = q_m = \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = ... = \dot{q}_m = 0;$$
$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H_0}{\partial p_\alpha};\; q_\alpha = \frac{\partial H_0}{\partial p_\alpha}(t-t_0) + q_\alpha^0; \qquad (9)$$
$$\alpha = m+1, ..., n;$$

системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}; \qquad (10)$$

2. *Квадратичная форма $V^{(2)}$ отрицательно определена по отношению к $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_m$ равномерно по $\dot{q}_{m+1}, ..., \dot{q}_n$;*

3. *Квадратичная форма $\Pi^{(r)}$ положительно определена по отношению к величинам $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_m$.*

Тогда многообразие (9) является устойчивым, причем для движений, начинающихся в некоторой окрестности (9), справедливо выражение [3]:

$$\sum_{j=1}^{m} |\dot{q}_j| \underset{t\to\infty}{\to} 0\,.$$

Доказательство. Подставим в (10) T и $\tilde{Q}$, умножим на $\dot{q}_i$ и просуммируем по i от 1 до n.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \tilde{Q}_i; \quad \tilde{Q}_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i; \qquad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0; \quad \alpha, i = m+1, ..., n\,.$$

Получим равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^{(0)}}{\partial q_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Отметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial T^{(2)}}{\partial t}\,.$$

Отсюда имеем

$$\frac{dT^{(2)}}{dt} + \frac{\partial T^{(2)}}{\partial T} + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \dot{a}_i - \sum \dot{q}_i \frac{\partial T^{(0)}}{\partial q_i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i}(\Pi + T^{(0)}) + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \dot{a}_i + \qquad (12)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T^{(2)}}{\partial t}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(T^{(2)} + \Pi) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \dot{q}_i}\,. \qquad (13)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем

$$\lambda = \inf_{\sum_{j=1}^{m} |\dot{q}_j| + |q_j| = 0} T^{(2)} + \Pi .$$

По свойствам функций $T^{(2)}$ и Π существует $\delta > 0$ такое, что в окрестности $\dot{q}_j = q_j = 0$ выполняется неравенство [4]

$$T^{(2)} + \Pi < \lambda \text{ при } \sum_{j+1}^{m} |\dot{q}_j| + |q_j| < \delta .$$

Из (9) следует, что $T^{(2)} + \Pi$ – невозрастающая функция. Тогда

$$T^{(2)} + \Pi \le T_0^{(2)} + \Pi_0 < \lambda \text{ при } \sum_{j=1}^{m} |\dot{q}_j^0| + |q_j| < \delta ,$$

и, следовательно, $\sum_{j=1}^{m} |\dot{q}_j| + |q_j| < \varepsilon$, т. е. устойчивость семейства (9) доказана.

Покажем, что $\sum_{j=1}^{m} |\dot{q}_j| \to 0$, т. е. по любому $\varepsilon > 0$ можно указать T_ε такое, что при $t > T_\varepsilon$ выполняется $\sum_{j=1}^{m} |\dot{q}_j| < \varepsilon$. Из рассуждений, приведенных выше, следует, что возможны лишь два случая [2].

1. Существует T такое, что $\sum_{j=1}^{m} |\dot{q}_j(T)| < \delta$ при $\sum_{j=1}^{m} |\dot{q}_j^0| + |q_j^0| < \delta$, и, следовательно, $\sum_{j=1}^{m} |\dot{q}_j| < \varepsilon \ \ \forall t \ge T$, т. е. $\sum_{j=1}^{m} |\dot{q}_j| \to 0$ при $t \to \infty$.

2. Не существует такого T, т. е. $\forall t \ge t_0$ справедливо $\sum_{j=1}^{m} |q_j| \ge \delta > 0$, следовательно, $V^{(2)} \le -\alpha \, (\alpha > 0)$. Из выражений

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \mu Q_i ; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (\mu \ge 0) \qquad (14)$$

имеем

$$\frac{d}{dt}(T^{(2)} + \Pi) \le -\alpha' \quad (\alpha' > 0) .$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$T^{(2)} + \Pi \le -\alpha'(t - t_0) + T_0^{(2)} + \Pi_0 .$$

Правая часть последнего неравенства стремится к $-\infty$ при $t \to \infty$ [5]. Левая же часть должна оставаться положительной по условиям теоремы. Полученное противоречие показывает, что возможен лишь случай 1, т. е. $\sum |\dot{q}_j| \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема доказана.

Замечание. Под устойчивостью многообразия (9) мы понимали его устойчивость по отношению лишь к фазовым переменным $q_1, q_2, ..., q_m$, но если понимать устойчивость (9) несколько шире, т. е. и по отношению к $\dot{q}_{m+1}, ..., \dot{q}_n$, то справедливо следующее утверждение [6].

Теорема 2. *Если $T^{(2)}$ есть квадратичная форма значений $q_1, ..., q_m$ ($q_\alpha - \partial H_0 / \partial p_\alpha$) с положительно определенной, равномерно ограниченной в окрестности (9) матрицей A и если выполнены условия 2 и 3 предыдущей теоремы, то семейство (9) устойчиво по отношению к фазовым переменным $q_1, q_2, ..., q_m, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n$ [7].*

Без доказательства.

Устойчивость неограниченных решений

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = PX + Q + \mu F(X) , \qquad (15)$$

где $X = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазовых переменных; P, Q – постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times 1$ соответственно; $F = (f_1, ..., f_n)^*$ – векторная функция; μ – малый параметр [4].

Равновесным мы будем называть такое решение (движение)

$$X(t, X_0) = (x_1(t, X_0), ..., x_n(t, X_0))^*$$

в n-мерном пространстве, у которого одна из координат неограниченно возрастает при $t \to \infty$, а остальные постоянны, например

$$x_j(t, X_0) \equiv x_j^0, \quad j = 1, ..., n-1; \quad x_n \to \infty$$

при $t \to \infty$.

Поставим вопрос о существовании равновесного решения системы (15) и о поведении решений этой системы уравнений, начинающихся в некоторой окрестности равновесного решения [3].

Пусть выполнены следующие условия: собственные числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ матрицы P таковы, что $\lambda_n = 0, \operatorname{Re}\lambda_j < 0$ для $j = 1, ..., n-1$; $F(\bar{X})$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица.

Сделаем замену $X = SY$, где S – невырожденная матрица размерности $n \times n$, и подставим это выражение в систему (15):

$$\dot{Y} = S^{-1}PSY + S^{-1}Q + \mu S^{-1}F(SY). \qquad (16)$$

Отметим, что $x_i = (S_i^*, Y)$, где S_i – i-я строка матрицы S. Матрица S выбирается так, чтобы матрица $A = S^{-1}PS$ имела последнюю строку и последний столбец нулевыми. Существование такой матрицы очевидно. Например, в качестве S можно взять хотя бы матрицу, составленную из корневых векторов матрицы P; в этом случае матрица A будет жордановой [7].

Перепишем систему (16) в виде

$$\dot{Y} = AY + R + \mu\Phi(Y), \qquad (17)$$

где $R = S^{-1}Q = (y_1, ..., y_n)^*$, $\Phi(Y) = S^{-1}F(SY) = (\varphi_1(Y), ..., \varphi_n(Y))^*$.

Разделим систему (17) на две группы уравнений:

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n-1}y_{n-1} + r_1 + \mu\varphi_1(Y);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{y}_{n-1} = a_{n-11}y_1 + a_{n-12}y_2 + ... + a_{n-1n}y_{n-1} + r_{n-1} + \mu\varphi_{n-1}(Y);$$
$$\dot{y}_n = r_n + \mu\varphi_n(Y). \qquad (18)$$

При $\mu = 0$ у системы (18) существует положение равновесия $Y_0 = (Y_1^0, ..., Y_{n-1}^0)$ в силу того, что матрица $\{a_{ij}\}$ $(i = 1, ..., n-1,\ j = 1, ..., n-1)$ невырожденная. Следовательно, по теореме о существовании неявной функции у системы (18) есть положение равновесия $Y(\mu)$ при любом μ, которое по модулю может быть меньше некоторого положительного μ_0. Это прямо следует из теоремы о существовании неявной функции, если учесть, что якобиан совпадает с определителем матрицы $\{a_{ij}\}$, $i,\ j = 1, ..., n-1$ [2].

Отметим, что если правые части $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ не будут зависеть от y_n, то положение равновесия системы (18) будет асимптотически устойчиво по Ляпунову и y_n будет меняться по линейному закону [6]:

$$y_n = y_{n0} + (r + \mu\varphi_n(Y_\mu))t.$$

Следовательно, равновесное решение системы (17) будет устойчиво по Ляпунову.

Изучим, какие ограничения на систему (15) наложит условие независимости Φ от y_n, т. е.

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n} = 0, \quad i = 1, ..., n. \qquad (19)$$

Поскольку

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_n} = (\nabla\varphi_i, S_n),$$

где S_n – n-й столбец матрицы S, то условие (19) эквивалентно уравнению

$$(\nabla\varphi_i, S_n) = 0. \qquad (20)$$

Вектор S_n ортогонален всем строкам матрицы P, т. е. ортогонален подпространству, натянутому на строки матрицы P, и так как

$$\nabla\varphi_i = \sum\sigma_{ij}\nabla f_i,$$

где σ_{ij} – элементы матрицы S^{-1}, то выполнено уравнение (20), а следовательно, будет справедливо и соотношение (19), если ∇f лежат в подпространстве, натянутом на строки матрицы P [5].

Рассмотрим равновесное решение $X(t)$. Пусть точка $M \in E_n$. Введем в рассмотрение величину $\rho(M, X(t))$ – расстояние от точки M до траектории $X(t): \rho(M, X(t)) = \min\limits_{\tau \geq t_0} \| M - X(\tau) \|$.

Определение 1. *Равновесное решение $X(t)$ является орбитально устойчивым (орбитально асимптотически устойчивым), если для любого сколь угодно малого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что для $\rho(X_0, X(t)) < \delta$ будет выполняться неравенство*

$$\rho(X(t, X_0), X(t)) < \varepsilon \text{ при } t \geq 0$$
$$(\rho(X(t, X_0), X(t)) \underset{t \to +\infty}{\to} 0).$$

Таким образом, доказана следующая теорема [4].

Теорема 3. *Пусть для системы (15) собственные числа матрицы P таковы, что $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ $(j = 1, ..., n-1)$, $\lambda_n = 0$, векторы ∇f_j $(j = 1, ..., n)$ существуют и лежат в подпространстве, натянутом на строки матрицы P. Тогда существу-*

ет такое $\mu_0 > 0$, *что для любого* μ, *по модулю превосходящего* μ_0, *существует орбитально асимптотически устойчивое неограниченное равновесное решение системы (1), устойчивое по Ляпунову.*

Таким образом, настоящая статья направлена на развитие математического аппарата исследования динамики управляемых систем. Методы основаны на качественном анализе нелинейных моделей с целью установления наличия и характера предельных режимов системы. Строго установлен факт существования стационарных инвариантных глобально устойчивых множеств у практически значимых моделей со многими неустойчивыми положениями равновесия. Предложены методы построения численных алгоритмов решения различных вычислительных задач, встречающихся в задачах системного анализа, в том числе обеспечивающих более точное прогнозирование динамики системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зубов, А.В.** Анализ систем управления и равновесных движений [Текст]/ А.В. Зубов, И.В. Зубов, М.В. Стрекопытова. – СПб.: «Мобильность-плюс», 2011. – 347 с.

2. **Зубов, А.В.** Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем [Текст]/ А.В. Зубов, Н.В. Зубов, С.В. Зубов, А.Ф. Зубова. – СПб.: Изд-во «ВВМ», 2011. – 362 с.

3. **Зубов, А.В.** Теория устойчивости и теория квазипериодических систем [Текст] / А.В. Зубов, Н.В. Зубов, С.А. Стрекопытов. – СПб.: «Мобильность-плюс», 2010. – 206 с.

4. **Зубов, Н.В.** Безопасность функционирования технических систем [Текст]/ Н.В. Зубов, А.Ф. Зубова. – СПб.: Изд-во «ВВМ», 2009. – 343с.

5. **Стрекопытова, М.В.** Исследование равновесных движений [Текст] / М.В. Стрекопытова. – СПб.: СПбГУ, 2007. – 95 с.

6. **Зубов, С.В.** Анализ равновесных движений и расчетная устойчивость [Текст] / С.В. Зубов, М.В. Стрекопытова. – СПб.: СПбГУ, 2010. – 446 с.

7. **Зубова, А.Ф.** Математические основы надежности процессов и аппаратов химической технологии [Текст] / А.Ф. Зубова. – Л.: ЛТИ им. Ленсовета, 1988. – 48 с.

УДК 539.125.4, 539.143.42

Ф.Ф. Павлов

РАСЧЕТ СПИН-ЗАВИСИМОЙ СТРУКТУРНОЙ ФУНКЦИИ ДЕЙТРОНА В ПЕРЕМЕННЫХ СВЕТОВОГО КОНУСА

Одним из наиболее актуальных вопросов современной физики элементарных частиц и атомного ядра является развитие методов релятивистского описания спиновых характеристик составных систем. На данный момент особое внимание уделяется так называемому спиновому кризису. Как известно, результат для спин-зависимой структурной функции нейтрона g_1^n извлекают из измеряемых в эксперименте спин-зависимой структурной функции протона g_1^p и спин-зависимой структурной функции дейтрона g_1^D, которые связаны между собой известным нерелятивистским соотношением. Сведения о спин-зависимой структурной функции нейтрона g_1^n менее точны, чем для протона, из-за трудностей в создании нейтронной мишени. Поэтому дейтрон – это один из главных источников информации для определения спин-зависимой структурной функции нейтрона.

Целями данной работы являются расчет спин-зависимой структурной функции дейтрона $g_1^D\left(x,\ Q^2\right)$ в бьёркеновском пределе и дальнейшая оценка релятивистской ядерной поправки к первому моменту спин-зависимой структурной функции дейтрона $\Gamma_1^D\left(Q^2\right)$.

Использование данной поправки позволяет вычислить первый момент спин-зависимой структурной функции нейтрона $\Gamma_1^n\left(Q^2\right)$. Исследуется зависимость спин-зависимой структурной функции дейтрона $g_1^D\left(x,\ Q^2\right)$ от бьёркеновской переменной x при значении переданного импульса виртуального фотона $Q^2 = 5$ (ГэВ/c)^2, с учетом различных параметризаций партонных распределений; проверяется выполнение правила сумм Бьёркена при указанном значении Q^2. Для достижения результата используются развитые ранее методы релятивистской теории поля в переменных светового конуса. В данной работе дейтрон представляется как суперпозиция двухнуклонных фоковских состояний с инвариантной массой, зависящей от относительного импульса конституэнтов. Описание двухчастичного состояния в переменных светового конуса подробно рассматривается в работах [1, 2].

Нормировка зарядового форм-фактора дейтрона

Рассмотрим треугольную фейнмановскую диаграмму процесса однократного электрон-дейтронного рассеяния (рис. 1).

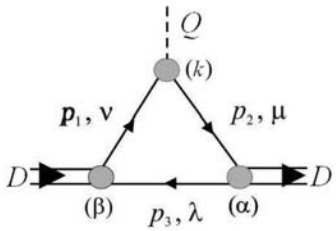


Рис. 1. Фейнмановская диаграмма для дейтрона

Как было показано в работе [1], плюсовый компонент матричного элемента электромагнитной вершины дейтронного тока F_+, соответствующий диаграмме на рис. 1, в переменных светового конуса определяет условие нормировки зарядового форм-фактора дейтрона при нулевой передаче импульса фотона $Q^2 = 0$ (ГэВ/c)^2:

$$F_+ = 2P_+ F_1^S(0)(w_S + w_D) = 2P_+ = \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4 i} \frac{\mathrm{Sp}\left\{\left(\Gamma_\beta V_\beta^{(\rho)}\right)\times \left(p_3^2 - m^2 + i\varepsilon\right)\times \times\left(-\hat{p}_3 + m\right)\cdot\left(\Gamma_\alpha^* V_\alpha^{(\rho)*}\right)\times \times\left(p_2^2 - m^2 + i\varepsilon\right)\times \times(\hat{p}_1 + m)\cdot\gamma_+\cdot(\hat{p}_1 + m)\right\}}{\times\left(p_1^2 - m^2 + i\varepsilon\right)}, \quad (1)$$

где w_S, w_D – вероятности S- и D-волновых состояний в дейтроне, соответственно, причем $w_S + w_D = 1$; p_1, p_2, – 4-векторы импульсов протонов; интегрирование ведется по 4-вектору импульса нейтрона p_3, где контур интегрирования замкнут вокруг полюса нейтронного пропагатора (массы всех нуклонов равны m); под импульсом со «шляпкой» подразумевается выражение $\hat{p} = p_\mu \gamma_\mu$ (γ_μ – 4-матрицы Дирака); $\gamma_+ = (\gamma_0 + \gamma_3)/\sqrt{2}$; Γ_β – полная вершинная функция распада дейтрона на конституэнты в начальном состоянии [1, 2]; Γ_α^* – полная вершинная функция дейтрона в конечном состоянии; $V_\beta^{(\rho)}$, $V_\alpha^{(\rho)*}$ – 4-векторы поляризаций дейтрона в начальном и конечном состояниях в спиральном представлении [3, 4]; $\rho = \pm 1, 0$ – спиральность дейтрона; по дважды повторяющимся индексам α и β всегда подразумевается суммирование; $F_1^S(Q^2)$ – изоскалярный электромагнитный форм-фактор нуклона Дирака, причем $F_1^S(0) = 1$.

Полная вершинная функция перехода дейтрона в протон-нейтронную пару имеет вид [1, 2]:

$$\Gamma_\beta = \Gamma_\beta^S G_S(M^2) + \Gamma_\beta^D G_D(M^2), \quad (2)$$

где Γ_β^S, Γ_β^D – вершинные функции дейтрона для S- и D-волновых состояний:

$$\Gamma_\beta^S = \gamma_\beta - \frac{(p_1 - p_3)_\beta}{M + 2m}; \quad (3)$$

$$\Gamma_\beta^D = \frac{M^2 - 4m^2}{4}\gamma_\beta + \frac{M + m}{2}(p_1 - p_3)_\beta; \quad (4)$$

$G_{S,D}(M^2)$ – скалярные вершинные функции для S- и D- волновых состояний дейтрона, которые связаны с радиальными волновыми функциями дейтрона $\Phi_{S,D}(M^2)$ [1, 2] соотношением

$$\Phi_{S,D}(M^2) = \frac{G_{S,D}(M^2)}{M^2 - M_D^2}, \quad (5)$$

причем M – инвариантная масса протон-нейтронной пары; M_D = 1875,6 МэВ/c^2 – масса дейтрона. Условие нормировки радиальных волновых функций дейтрона (5) для S- и D-волн имеет вид [1, 2]:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{dz d^2\mathbf{k}}{z(1-z)} M^2 \left|\Phi_S(M^2)\right|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{p} 4M \left|\Phi_S(M^2)\right|^2 = w_S; \quad (6)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{dz d^2\mathbf{k}}{z(1-z)} 2M^2\mathbf{p}^4 \left|\Phi_D(M^2)\right|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{p} 8M\mathbf{p}^4 \left|\Phi_D(M^2)\right|^2 = w_D, \quad (7)$$

$$\int \frac{dz d^2\mathbf{k}}{z(1-z)} = \int \frac{4}{M} d^3\mathbf{p}.$$

В нерелятивистском формализме обычно используется нормировка:

$$\int_0^\infty dp p^2 \left[\left(\Psi_S(p)\right)^2 + \left(\Psi_D(p)\right)^2\right] = w_S + w_D = 1. \quad (8)$$

Соответствие между радиальными волновыми функциями $\Phi_{S,D}$ и нерелятивистскими волновыми функциями $\Psi_{S,D}$ имеет вид

$$\left|\Phi_S\right|^2 = \frac{\pi^2}{2M}\left|\Psi_S\right|^2; \quad (9)$$

$$\left|\Phi_D\right|^2 = \frac{\pi^2}{4M\mathbf{p}^4}\left|\Psi_D\right|^2. \quad (10)$$

Напомним, что полный 4-импульс дейтрона равен $P = p_1 + p_3$ (см. рис. 1). В дальнейшем будем опускать 4-тензорный индекс μ над 4-векторами. Так как в переменных светового конуса плюсовый компонент 4-импульса дейтрона равен $P_+ = p_{1+} + p_{3+}$, то удобно ввести $z = p_{1+} / P_+$ и $1 - z = p_{3+} / P_+$ – доли импульса системы, которые несут частицы 1 и 3. Квадрат инвариантной массы такой системы равен

$$M^2 = P^2 = \left(p_1 + p_3\right)^2 = \\ = \frac{m_1^2 + \mathbf{p}_{1\perp}^2}{z} + \frac{m_3^2 + \mathbf{p}_{3\perp}^2}{1-z} - (\mathbf{p}_{1\perp} + \mathbf{p}_{3\perp})^2 . \qquad (11)$$

Поперечный импульс $\mathbf{P}_\perp = \mathbf{p}_{1\perp} + \mathbf{p}_{3\perp}$ описывает движение системы как целого. В системе Брейта поперечные импульсы протон-нейтронной пары в начальном и конечном состояниях выбираются равными $\mathbf{P}_\perp = \mathbf{Q}/2$ и $\mathbf{P}'_\perp = \mathbf{Q}/2$ соответственно, а плюсовые компоненты совпадают: $P_+ = P_+'$. В данной работе мы ведем расчет плюсового компонента матричного элемента электромагнитной вершины дейтронного тока при нулевой передаче импульса фотона $\mathbf{Q} = 0$, который определяет условие нормировки зарядового форм-фактора дейтрона.

Определим относительный поперечный импульс $\mathbf{k}$ для двух начальных нуклонов соотношениями

$$\mathbf{p}_{1\perp} = \mathbf{k} + z\mathbf{P}_\perp ;$$

$$\mathbf{p}_{3\perp} = -\mathbf{k} + \left(1-z\right)\mathbf{P}_\perp . \qquad (12)$$

Из соотношений (11) и (12) при $m_1 = m_3 = m$ следует, что

$$M^2 = \frac{\mathbf{k}^2 + m^2}{z(1-z)} . \qquad (13)$$

4-вектор импульса двухнуклонных фоковских состояний с инвариантной массой M в переменных светового конуса имеет компоненты

$$P = (P_+, P_-, \mathbf{P}_\perp \left(P_+, \frac{M^2 + \mathbf{P}_\perp^2}{2P_+}, \mathbf{P}_\perp \right). \qquad (14)$$

Спиральные состояния для двухнуклонных фоковских состояний с инвариантной массой M в переменных светового конуса будут описываться продольным (ρ = 0) 4-вектором поляризации [3, 4]

$$V^{(\rho=0)} = \frac{1}{M}\left(P_+, \frac{-M^2 + \mathbf{P}_\perp^2}{2P_+}, \mathbf{P}_\perp \right), \qquad (15)$$

и поперечным (ρ = ±1) 4-вектором поляризации в переменных светового конуса [3, 4]:

$$V^{(\rho=\pm1)} = \left(0, \frac{\left(\mathbf{P}_\perp \cdot \mathbf{e}^{(\rho=\pm1)}\right)}{P_+}, \mathbf{e}^{(\rho=\pm1)} \right), \qquad (16)$$

где поперечные циркулярные орты имеют привычный вид

$$\mathbf{e}^{(\rho=\pm1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2\right);$$

$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – единичные орты вдоль осей x и y, соответственно.

Как и должно быть, скалярное произведение 4-векторов $PV^{(\rho)} = 0$. Подчеркнем, что в формуле (15) $M \neq M_D$. В релятивизме вектор поляризации продольного состояния неизбежно зависит от инвариантной массы протон-нейтронной пары M. Такой продольный вектор поляризации двухнуклонного фоковского состояния с инвариантной массой ранее не использовался.

Вычисление шпура в амплитуде (1) подробно рассматривается в работах [1, 2]. Не повторяя все этапы расчета однопетлевого интеграла, плюсовый компонент матричного элемента электромагнитной вершины дейтронного тока F_+ в переменных светового конуса мы можем свести к виду

$$F_+ = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \frac{dz d^2\mathbf{k}}{z^2(1-z)} \times \\ \times \sum_{\lambda,\nu} \Phi^*_{\lambda\nu}\left[\bar{u}(p_1,\nu)\gamma_+ u(p_1,\nu)\right]\Phi_{\nu\lambda}, \qquad (17)$$

где

$$\Phi_{\nu\lambda} = \frac{\bar{u}(p_1,\nu)V_\beta^{(\rho)}\Gamma_\beta v(p_3,\lambda)}{M^2 - M_D^2} = \\ = \left[\bar{u}\left(p_1,\nu\right)V_\beta^{(\rho)}\Gamma_\beta^S v\left(p_3,\lambda\right)\right]\Phi_S(M^2) + \\ + \left[\bar{u}\left(p_1,\nu\right)V_\beta^{(\rho)}\Gamma_\beta^D v\left(p_3,\lambda\right)\right]\Phi_D(M^2). \qquad (18)$$

Аналитические выражения (18) при $\rho = \pm 1$, 0 приведены в работе [1].

Выражения для нуклонных матричных элементов, входящих в формулу (17), имеются в работах [2, 4, 5], в которых используются спиноры в формализме светового конуса, в частности

$$\hat{p}_1 + m = \sum_{\nu=\pm 1} u(p_1,\nu)\bar{u}(p_1,\nu); \qquad (19)$$

$$-\hat{p}_3 + m = -\sum_{\lambda=\pm 1} v(p_3,\lambda)\bar{v}(p_3,\lambda); \qquad (20)$$

$$\bar{u}(p_1,\nu)\gamma_+ u(p_1,\nu) = 2p_{1+} = 2zP_+; \qquad (21)$$

$$\bar{u}(p_1,\nu)\gamma_+\gamma_5 u(p_1,\nu) = 2\nu p_{1+} = 2\nu z P_+, \qquad (22)$$

где $u(p_1, \nu)$ – спинор протона (входящий фермион с точки зрения фейнмановской диаграммы) с импульсом p_1 и спиральностью $s = \nu/2$, $\nu = \pm 1$ [2, 4, 5]; $v(p_3,\lambda)$ – спинор нейтрона (выходящий антифермион с точки зрения фейнмановской диаграммы) с импульсом $-p_3$ и спиральностью $-s = \lambda/2$, $\lambda = \pm 1$ [2, 4, 5]. Следует отметить, что спиноры в формализме светового конуса отличаются от привычных спиноров Дирака только спиновым вращением, которое есть известное преобразование Вигнера – Мелоша [6, 7]. Явный вид спиноров будет более подробно рассмотрен в приложении «Спиноры для частицы со спином 1/2».

Представим выражение (17) как

$$F_+ = 2P_+\int n^{(+)}(z)dz = \\ = \frac{2P_+}{2(2\pi)^3}\int \frac{dz d^2\mathbf{k}}{z(1-z)}\sum_{\lambda,\nu}\Phi^{(\rho)*}_{\nu\lambda}\Phi^{(\rho)}_{\nu\lambda} = 2P_+. \qquad (23)$$

Тогда простое вычисление дает следующий результат:

$$n^{(+)}(z) = \\ = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{z(1-z)}\sum_{\lambda,\nu}\Phi^{(\rho=+1)*}_{\nu\lambda}\Phi^{(\rho=+1)}_{\nu\lambda} = \\ = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{z(1-z)}\left\{2M^2\left|\Phi_S\left(M^2\right)\right|^2 + \right. \qquad (24) \\ + 2M^2\mathbf{p}^2\left[\mathbf{p}^2 + (3/2)\mathbf{k}^2\right]\left|\Phi_D\left(M^2\right)\right|^2 + \\ \left. + 4M^2\left[\mathbf{p}^2 - (3/2)\mathbf{k}^2\right]\Phi_S\left(M^2\right)\Phi_D\left(M^2\right)\right\},$$

где $\mathbf{p} = (\mathbf{k}, p_z)$ – относительный внутридейтронный 3-импульс, введенный в работе [8];

$$p_z = -\frac{1}{2}(1-2z)M, \quad \mathbf{p}^2 = \frac{1}{4}M^2 - m^2.$$

Следует отметить, что при усреднении по угловым переменным $\left\langle \mathbf{k}^2 \right\rangle = (2/3)\mathbf{p}^2$ [2].

Для дейтрона со спиральностью $\rho = 0$ можно записать:

$$n^{(0)}(z) = \\ = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{z(1-z)}\sum_{\lambda,\nu}\Phi^{(\rho=0)*}_{\nu\lambda}\Phi^{(\rho=0)}_{\nu\lambda} = \\ = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{z(1-z)}\left\{2M^2\left|\Phi_S\left(M^2\right)\right|^2 + \right. \qquad (25) \\ + 2M^2\mathbf{p}^2\left[4\mathbf{p}^2 - 3\mathbf{k}^2\right]\left|\Phi_D\left(M^2\right)\right|^2 + \\ \left. + 4M^2\left[3\mathbf{k}^2 - 2\mathbf{p}^2\right]\Phi_S\left(M^2\right)\Phi_D\left(M^2\right)\right\}.$$

Зная явный вид выражения $n^{(+)}(z)$ (24), можно найти неполяризованные структурные функции дейтрона $F_1^D(x_D)$ и $F_2^D(x_D)$ в пределе бьёркеновского скейлинга:

$$F_1^D(x_D) = \int_{x_D}^1 \frac{dz}{z} n^{(+)}(z) F_1^N\left(\frac{x_D}{z}\right); \qquad (26)$$

$$F_2^D(x_D) = \int_{x_D}^1 dz n^{(+)}(z) F_2^N\left(\frac{x_D}{z}\right), \qquad (27)$$

которые имеют простую квантовомеханическую интерпретацию: вероятность найти кварк в дейтроне, несущий долю импульса дейтрона x_D, есть произведение вероятностей найти кварк в нуклоне с долей импульса x_D/z и найти нуклон с долей импульса z.

Релятивистская ядерная поправка к средней спиральности протона в дейтроне

Как известно, в нерелятивистском приближении удвоенная средняя спиральность протона в дейтроне $\left\langle \nu_p \right\rangle$ определяется выражением

$$\left\langle \nu_p \right\rangle_{nonrel} = \left\langle S_z \right\rangle = w_S - \frac{1}{2}w_D = \\ = 1 - \frac{3}{2}w_D. \qquad (28)$$

В релятивистском рассмотрении это выражение кардинально изменится [1]. Если использовать полную волновую функцию дейтрона (18), то выражение для средней спиральности приобретет привычную квантовомеханическую формулу для вычисления среднего значения с правильной нормировкой:

$$\left\langle \nu_p \right\rangle = \frac{\int \frac{dzd^2\mathbf{k}}{z(1-z)} \sum_{\lambda,\nu} \nu \Phi_{\nu\lambda}^{(\rho=1)*} \Phi_{\nu\lambda}^{(\rho=1)}}{\int \frac{dzd^2\mathbf{k}}{z(1-z)} \sum_{\lambda,\nu} \Phi_{\nu\lambda}^{(\rho=1)*} \Phi_{\nu\lambda}^{(\rho=1)}}. \quad (29)$$

Аналитическое выражение для релятивистской средней спиральности и результаты расчета приведены в работе [1], где в качестве нерелятивистских волновых функций $\Psi_{S,D}$ использовались боннская [9] и парижская [10] волновые функции и правила соответствия (9), (10).

Для нахождения релятивистской поправки необходимо выражение (29) разделить на привычную нерелятивистскую часть (28) и релятивистскую поправку Δ_{rel}:

$$\left\langle \nu_p \right\rangle = w_S - \frac{1}{2} w_D + \Delta_{rel} = 1 - \frac{3}{2} w_D + \Delta_{rel}; \quad (30)$$

$$\Delta_{rel} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \times \left\{ \frac{4M\mathbf{k}^2(2p_z - m)}{(M+2m)\left(\mathbf{k}^2 + m^2\right)} \Phi_S^2(M^2) + \right.$$
$$+ \frac{\mathbf{p}^2 M}{\left(\mathbf{k}^2 + m^2\right)} \left[2\mathbf{k}^2 p_z (M+4m) + \right. \quad (31)$$
$$\left. + 8m^2 p_z^2 + \mathbf{k}^2 M(M-4m) \right] \Phi_D^2(M^2) +$$
$$+ \frac{2M}{\left(\mathbf{k}^2 + m^2\right)} \left\{ \mathbf{k}^2 \left[M(2p_z - m) + 2mp_z \right] + \right.$$
$$\left. \left. + 4m^2 p_z^2 \right\} \Phi_S(M^2) \Phi_D(M^2) \right\}.$$

Если среднюю спиральность (29) представить в виде

$$\left\langle \nu_p \right\rangle = \int_0^1 \nu(z)\, dz,$$

то можно оценить зависимость подынтегрального выражения $\nu(z)$ (распределение средней спиральности дейтрона) от доли переданного импульса z. Как было показано в работе [1], в формализме светового конуса появляется релятивистский эффект асимметрии, когда нуклон, уносящий большую долю импульса системы z, дает больший вклад в распределение средней спиральности дейтрона.

Релятивистская ядерная поправка к спин-зависимой структурной функции дейтрона $g_1^D(x, Q^2)$

Если пренебречь поперечным импульсом кварка, по сравнению с его продольным импульсом в глубоконеупругом рассеянии лептонов на протонах при высоких энергиях, то 4-вектор импульса кварка можно представить в виде $x_N p^\mu$, где x_N – скейлинговая безразмерная переменная Бьёркена для нуклона $x_N = Q^2/2pq$ ($0 < x_N < 1$) (доля импульса нуклона, который несет кварк); p^μ – 4-вектор импульса нуклона (q^μ – 4-вектор переданного импульса виртуального фотона, $Q^2 = -q^2$). Кроме того, если 4-вектор импульса кварка представить в виде $x_D P^\mu$, где $x_D = Q^2/2pq$ (доля импульса дейтрона, который несет кварк), P^μ – 4-вектор импульса дейтрона, то

$$p^\mu = (x_D / x_N) P^\mu;$$

$$p_+ = (x_D / x_N) P_+ = z P_+; \; z = x_D / x_N.$$

Как известно, спин-зависимая структурная функция нуклона $g_1^N\left(x_N, Q^2\right)$ в кварк-партонной модели представляет собой разность вероятностей того, что кварк в продольно-поляризованном нуклоне имеет долю импульса x_N и его спин направлен параллельно или антипараллельно спину нуклона:

$$g_1(x_N) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 \left[q^\uparrow(x_N) - q^\downarrow(x_N) \right],$$

где $q^\uparrow(x_N)$ – распределение по доли импульса x_N кварков с проекцией спина $+1/2$ на направление спина нуклона.

Как известно, согласно наивной кварк-партонной модели, спин протона 1/2 набирается из спинов составляющих его кварков. В 1988 году Европейская мюонная коллаборация (EMC) в Европейской организации по ядерный исследованиям (CERN) измерила спин-зависимую структурную функцию протона $g_1^p(x)$ в области $x = 0{,}01 - 0{,}90$ и представила результаты, в которых спины кварков дали малый вклад в спин протона. Оказалось, что спины кварков вносят всего 20–30 % в спин протона. Эта проблема в литературе получила название «спиновый кризис». Дальнейшие эксперименты проводились Спиновой мюонной коллаборацией (SMC) в Европейской организации по ядерный исследованиям (CERN), Швейцария; в Национальной ускорительной лаборатории Стэнфордского центра линейного ускорителя (SLAC), Стэнфорд, США; в исследовательском центре «Немецкий электронный синхротрон» (DESY), Гамбург, Германия. Спиновый кризис до сих пор не разрешен, и все еще нет окончательной ясности, несмотря на огромное количество публикаций и теоретических гипотез. Спин-зависимая структурная функция протона в первом приближении может быть получена из экспериментально наблюдаемых величин – продольной асимметрии $A_{\parallel}$, фактора деполяризации D виртуального фотона и неполяризованных структурных функций $F_2^p\left(x,\ Q^2\right)$ и $R\left(x,\ Q^2\right)$ [11]. Результат для спин-зависимой структурной функции нейтрона получают из измеряемых в эксперименте спин-зависимой структурной функции дейтрона g_1^D, спин-зависимой структурной функции протона g_1^p, неполяризованных структурных функций F_1^p, F_1^n и F_1^D по формуле [12]:

$$g_1^n = \frac{g_1^D}{\left(1-\frac{3}{2}w_D\right)}\frac{F_1^n + F_1^p}{F_1^D} - g_1^p .$$

Техника вычисления ядерных поправок к спин-зависимой структурной функции дейтрона является актуальной, поскольку на сегодняшний день не найдено однозначной процедуры учета релятивистских эффектов в дейтроне; в связи с этим развитие релятивистской теории структуры дейтрона представляется очень перспективным. Данному вопросу посвящено обширное число публикаций, например [13 – 15].

Спин-зависимая структурная функция дейтрона $g_1^D\left(x_D,\ Q^2\right)$ в бьёркеновском пределе может быть выражена через распределение средней спиральности дейтрона $\nu(z)$ [1] и спин-зависимую структурную функцию нуклона $g_1^N\left(x_N,\ Q^2\right)$ следующим образом:

$$g_1^D\left(x_D,\ Q^2\right) = \int\limits_{x_D}^{1}\frac{dz}{z}\nu(z)g_1^N\left(\frac{x_D}{z},Q^2\right), \quad (32)$$

где функция $g_1^N\left(x_N,\ Q^2\right)$ представляется в виде полусуммы спин-зависимых структурных функций протона и нейтрона:

$$g_1^N\left(x_N,\ Q^2\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(g_1^p\left(x_N,\ Q^2\right) + g_1^n\left(x_N,\ Q^2\right)\right). \quad (33)$$

Как известно, величина первого момента спин-зависимой структурной функции дейтрона представляет из себя интеграл

$$\Gamma_1^D\left(Q^2\right) = \int\limits_0^1 g_1^D\left(x_D,\ Q^2\right)dx_D = \\ = \int\limits_0^1 dx_D \int\limits_{x_D}^1 \frac{dz}{z}\nu(z)g_1^N\left(\frac{x_D}{z},Q^2\right), \quad (34)$$

а величина первого момента спин-зависимой структурной функции нуклона

$$\Gamma_1^N\left(Q^2\right) = \int\limits_0^1 g_1^N\left(x_N,Q^2\right)dx_N \quad (35)$$

характеризует полный вклад кварков в спин нуклона.

Делая замену переменных в интеграле (34) как $x_N = x_D / z$ и меняя порядок интегрирования, выражение для первого момента спин-зависимой структурной функции дейтрона можно разделить на нерелятивистскую часть и релятивистскую поправку, с учетом формулы (30):

$$\Gamma_1^D\left(Q^2\right) = \int\limits_0^1 \nu(z)dz\int\limits_0^1 g_1^N\left(x_N,Q^2\right)dx_N =$$

$$= \left\langle \nu_p \right\rangle \cdot \int_0^1 g_1^N \left(x_N, Q^2 \right) dx_N = \\ = \left\langle \nu_p \right\rangle \cdot \Gamma_1^N \left(Q^2 \right) = \\ = \left(1 - \frac{3}{2} w_D \right) \Gamma_1^N \left(Q^2 \right) + \Delta_{rel} \Gamma_1^N \left(Q^2 \right). \quad (36)$$

Напомним, что экспериментаторы в своих расчетах используют нерелятивистское соотношение:

$$\Gamma_1^D \left(Q^2 \right) = \left(1 - \frac{3}{2} w_D \right) \Gamma_1^N \left(Q^2 \right).$$

Приведем экспериментальные значения первых моментов спин-зависимых структурных функций протона Γ_1^p и нейтрона Γ_1^n при $Q^2 = 5$ (ГэВ/c)^2, полученные коллаборацией E155 из анализа всех доступных данных [12]:

$$\Gamma_1^p = 0{,}118 \pm 0{,}004 \text{ (стат.)} \pm \\ \pm 0{,}007 \text{ (сист.)}; \quad (37)$$

$$\Gamma_1^n = -0{,}058 \pm 0{,}005 \text{ (стат.)} \pm \\ \pm 0{,}008 \text{ (сист.)}. \quad (38)$$

Экспериментальное значение для Γ_1^D составляет

$$\Gamma_1^D = 0{,}028 \pm 0{,}004 \text{ (стат.)} \pm \\ \pm 0{,}005 \text{ (сист.)}. \quad (39)$$

Для первых моментов протона и нейтрона существуют теоретические соотношения, связывающие их с фундаментальными константами слабых взаимодействий – правила сумм Бьёркена, Эллиса – Джаффе. Проверка правила сумм Бьёркена для $Q^2 = 5$ (ГэВ/c)^2 по данным эксперимента E155 [12] дало следующий результат:

$$\Gamma_1^p - \Gamma_1^n = 0{,}176 \pm 0{,}003 \text{ (стат.)} \pm \\ \pm 0{,}007 \text{ (сист.)}. \quad (40)$$

Запишем первый момент спин-зависимой структурной функции нейтрона, который извлекают из измеряемых в эксперименте первых моментов спин-зависимых структурных функций дейтрона $\Gamma_1^D \left(Q^2 \right)\Big|_{exp}$ и протона $\Gamma_1^p \left(Q^2 \right)\Big|_{exp}$ с учетом релятивистской поправки:

$$\Gamma_1^n \left(Q^2 \right) = \frac{2\Gamma_1^D \left(Q^2 \right)\Big|_{exp}}{\left\langle \nu_p \right\rangle} - \Gamma_1^p \left(Q^2 \right)\Big|_{exp}. \quad (41)$$

При $Q^2 = 5$ (ГэВ/c)^2 получаем следующий результат: $\Gamma_1^n = -0{,}05621$.

Тогда правило сумм Бьёркена при $Q^2 = 5$ (ГэВ/c)^2 даст следующий результат: $\Gamma_1^p - \Gamma_1^n = 0{,}17421$, который хорошо согласуется с экспериментальным значением.

Для спин-зависимой структурной функции нуклона $g_1^N \left(x,\ Q^2 \right)$ существует несколько различных параметризаций [16]. В данной работе использованы параметризации партонных распределений GRSV2000 [17], DNS2005 [18] и LSS2006 [19].

На рис. 2 показаны результаты мировых данных по g_1^D для дейтрона, где g_1^D усреднена по Q^2 и приведена к одному и тому же значению $Q^2 = 5$ (ГэВ/c)^2 по результатам экспериментов E155 [20], E143 [21] в Национальной ускорительной лаборатории Стэнфордского центра линейного ускорителя SLAC, Стэнфорд, США; SMC [22] в Европейской организации по ядерный исследованиям CERN, Швейцария; и параметризация через партонные распределения GRSV2000 (NLO «standard» scenario) [17].

На рис. 3 приведены сравнения результатов расчета структурной функции нуклона g_1^N (33) при $Q^2 = 5$ (ГэВ/c)^2 и той же функции, умноженной на фактор $1-(3/2)w_D$ (обе при

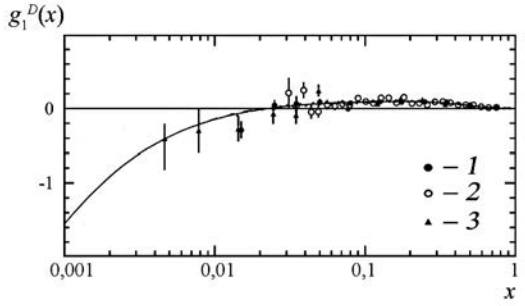


Рис. 2. Графики спин-зависимой структурной функции $g_1^D(x)$ для дейтрона, построенные по результатам различных исследовательских групп: E155 [20] (*1*), E143 [21] (*2*), SMC [22] (*3*); $Q^2 = 5$ (ГэВ/c)^2; линия – параметризация через партонные распределения GRSV2000 [17]

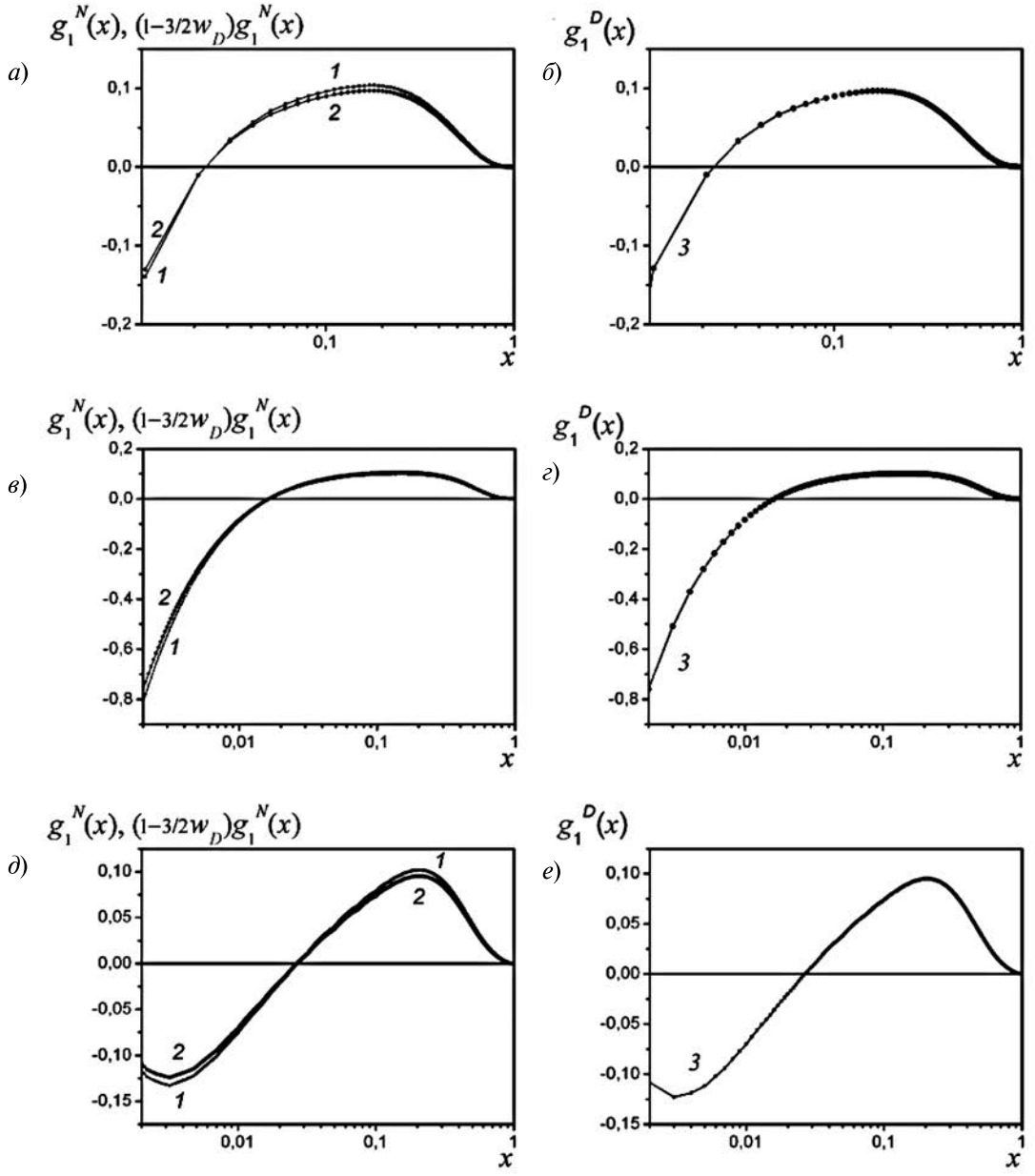


Рис. 3. Сравнение пар (*1*, *2*) графиков спин-зависимых структурных функций для нуклона (*а, в, д*) с аналогичными одиночными графиками для дейтрона (*б, г, е*); построены с использованием параметризации партонных распределений GRSV2000 (*а, б*), DNS2005 (*в, г*), LSS2006 (*д, е*);
для всех случаев $Q^2 = 5$ (ГэВ/c)^2; *1*, *2* – функции $g_1^N(x)$ и $(1-(3/2)w_D)g_1^N(x)$ соответственно; *3* – функции $g_1^D(x)$, рассчитанные по формуле (32)

$Q^2 = 5$ (ГэВ/c)^2), с результатами расчета структурной функции дейтрона g_1^D по формуле (32) при $Q^2 = 5$ (ГэВ/c)^2, параметризованные через различные партонные распределения. Результаты приведены с использованием боннской волновой функции дейтрона [9].

Из рис. 3 видно, что форма кривой спин-зависимой структурной функции дейтрона g_1^D от x, рассчитанной по релятивистской формуле (32), несильно отличается от функции $\left(1-3/2w_D\right)g_1^N$, параметризованной через партонные распределения. Видно, что вклад реля-

тивистской поправки к спин-зависимой структурной функции дейтрона мал. Это связано с тем, что в качестве волновой функции дейтрона использовалась нерелятивистская волновая функция [9]; но можно предположить, что при рассмотрении указанной функции дейтрона, описывающей малые межнуклонные расстояния, при которых будут проявляться вклады, обусловленные кварк-глюонной структурой нуклона, этот вклад будет не так мал. Полного решения уравнения для дейтрона на световом конусе не существует. Ряд широко используемых потенциалов содержит компоненты, вообще не поддающиеся теоретико-полевой трактовке. Поэтому в качестве начального приближения предполагалось оценивать релятивистские эффекты, используя правила соответствия (9), (10) и современные реалистические волновые функции, например боннскую и парижскую.

В заключение автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук Н.Н. Николаеву, сотруднику Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН и Института ядерной физики г. Юлих, Германия, а также С.И. Манаенкову, сотруднику Петербургского института ядерной физики им. Б.П. Константинова РАН, за ценные идеи и обсуждения, стимулировавшие появление данной работы.

Приложение

Спиноры для частицы со спином 1/2

В данной работе используются спиноры в формализме светового конуса. Как известно, спиновое состояние частицы со спином 1/2 с 4-импульсом $p=(E,\ \mathbf{p})$ в представлении Дирака – Паули описывается спинором [23]:

$$u(p)=\begin{pmatrix}\sqrt{E+m}w\\ \sqrt{E-m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})w\end{pmatrix}= =\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}w\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}w\end{pmatrix}, \tag{42}$$

где $\mathbf{n}=\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ – орт вектора $\mathbf{p}$, $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z)$ – матрицы Паули, $w^{(s)}$ – собственная функция оператора $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})$:

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})w^{(s)}=sw^{(s)}. \tag{43}$$

В формализме светового конуса для описания частицы со спином 1/2 и 4-импульсом $p=(p_+,\ p_-,\ \mathbf{p}_\perp)$ используются следующие спиноры [2, 4, 5]:

$$u(p,\lambda)= =\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}p_+}}\left(\sqrt{2}p_+ +\beta m+\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}_\perp\right)\chi_\lambda, \tag{44}$$

где $\beta=\gamma_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}$; спиноры χ_λ при $\lambda=\pm1$ имеют вид

$$\chi_{\lambda=1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1,\ 0);$$

$$\chi_{\lambda=-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ 0,\ -1). \tag{45}$$

Простые алгебраические вычисления дают выражения для спиноров:

$$u(p,\lambda=1)=N\begin{pmatrix}\sqrt{2}p_+ +m\\ p_x+ip_y\\ \sqrt{2}p_+ -m\\ p_x+ip_y\end{pmatrix}; \tag{46}$$

$$u(p,\lambda=-1)=N\begin{pmatrix}-p_x+ip_y\\ \sqrt{2}p_+ +m\\ p_x-ip_y\\ -\sqrt{2}p_+ +m\end{pmatrix}, \tag{47}$$

где нормировочный множитель $N=\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}p_+}}$.

При этом, согласно результатам работ [2, 4, 5], справедливы выражения

$$\bar{u}(p,\lambda)=u^+(p,\lambda)\gamma_0; \tag{48}$$

$$\bar{u}(p,\lambda')u(p,\lambda)= =-\bar{v}(p,\lambda)v(p,\lambda')=2m\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{49}$$

Спиноры $v(p,\lambda)$ для античастицы описываются как

$$v(p,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}p_+}}\left(\sqrt{2}p_+ -\beta m+\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}_\perp\right)\chi_{-\lambda}. \quad (50)$$

В результате алгебраических преобразований получаем выражения для спиноров:

$$v(p,\lambda=1)=N\begin{pmatrix}-p_x+ip_y\\ \sqrt{2}p_+ -m\\ p_x-ip_y\\ -\sqrt{2}p_+ -m\end{pmatrix}; \quad (51)$$

$$v(p,\lambda=-1)=N\begin{pmatrix}\sqrt{2}p_+ -m\\ p_x+ip_y\\ \sqrt{2}p_+ +m\\ p_x+ip_y\end{pmatrix}. \quad (52)$$

Поскольку $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})X=\lambda X$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор вдоль оси z, можно записать спинор $u(p,\lambda)$ в виде

$$\begin{aligned}u(p,\lambda=1)&=\\ &=N\begin{pmatrix}\sqrt{2}p_+ +m & (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}_\perp)\\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}_\perp) & \sqrt{2}p_+ -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})X\end{pmatrix}=\\ &=N\begin{pmatrix}\left[\sqrt{2}p_+ +m+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}_\perp)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\right]X\\ \left[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}_\perp)+\left(\sqrt{2}p_+ -m\right)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\right]X\end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (53)$$

Отметим, что в формализме светового конуса спиральность λ при $\mathbf{p}_\perp=0$ является обычной, т. е. совпадает с проекцией спина на 3-импульс частицы, но при $\mathbf{p}_\perp\neq 0$ это разные величины.

Чтобы установить соответствие с привычным видом решений уравнения Дирака (42)

$$\begin{aligned}u(p)&=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}w\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}w\end{pmatrix}=\\ &=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}w\\ w'\end{pmatrix},\end{aligned} \quad (54)$$

введем спинор $w=\left[\sqrt{2}p_+ +m+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}_\perp)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\right]X$. Тогда, обращая это выражение, получим равенство

$$\begin{aligned}X&=\frac{\sqrt{2}p_+ +m-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}_\perp)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})}{\left(\sqrt{2}p_+ +m\right)^2+\mathbf{p}_\perp^2}w=\\ &=\frac{\sqrt{2}p_+ +m-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}_\perp)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})}{2\sqrt{2}p_+(E+m)}w.\end{aligned} \quad (55)$$

Используя это выражение в нижнем компоненте спинора (53), после несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned}w'&=\frac{\left[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}_\perp)+\left(\sqrt{2}p_+ -m\right)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\right]\times}{2\sqrt{2}p_+\times}\\ &\frac{\times\left[\sqrt{2}p_+ +m-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}_\perp)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\right]}{\times(E+m)}w=\\ &=\frac{2\sqrt{2}p_+\left[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}_\perp)+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})p_z\right]}{2\sqrt{2}p_+(E+m)}w=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}w.\end{aligned} \quad (56)$$

Тем самым полученный спинор X отличается от привычного спинора w только спиновым вращением, которое есть известное преобразование Вигнера – Мелоша.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Павлов, Ф.Ф.** Оценка релятивистской поправки к средней спиральности протона в дейтроне [Текст] / Ф.Ф. Павлов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.– 2011.– № 3 (129).– С. 143 – 152.

2. **Ivanov, I.P.** Diffractive production of S and D wave vector mesons in deep inelastic scattering [Электронный ресурс] / I.P. Ivanov // arXiv: hep-ph/9909394.

3. **Choi, H.-M.** Electromagnetic structure of the ρ meson in the light-front quark model [Text] / Ho-Meoyng Choi, Chueng-Ryong Ji // Phys. Rev. D.– 2004.– Vol. 70.– P. 053015-1 – 053015-14.

4. **Brodsky, S.J.** Quantum chromodynamics and other field theories on the light cone original research article [Text] / S.J. Brodsky, P. Hans-Christian, S.S. Pinsky // Phys. Rep.– 1998.– Vol. 301.– P. 229 – 486.

5. **Lepage, G.P.** Exclusive processes in perturbative quantum chromodynamics [Text] / G.P. Lepage, S.J. Brodsky // Phys. Rev. D.– 1980.– Vol. 22.– P. 2157 – 2198.

6. **Melosh, H.J.** Quarks: currents and constituents [Text] / H.J. Melosh // Phys. Rev. D.– 1974.– Vol. 9.– P. 1095 – 1112.

7. **Kondratyuk, L.A.** The scattering problem for relativistic systems with a fixed number of particles in light-front

dynamics [Text] / L.A. Kondratyuk, M.V. Terent'ev // Sov. J. Nucl. Phys.– 1980.–Vol. 31.– P. 561 – 570.

8. **Терентьев, М.В.** О структуре волновых функций мезонов как связанных состояний релятивистских кварков [Текст] / М.В. Терентьев // Ядерная физика.– 1976.– Т. 24.– С. 207 – 213.

9. **Machleidt, R.** The Bonn meson-exchange model for the nucleon-nucleon interaction [Text] / R. Machleidt, K. Holinde, Ch. Elster // Phys. Rep.– 1987.– Vol. 149.– P. 1 – 89.

10. **Lacombe, M.** Parametrization of the deuteron wave function of the Paris N-N potential [Text] / M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vinh Mau [et al.] // Physics Letters B. – 1981.–Vol. 101.– Iss. 3.–P. 139 – 140.

11. **Anselmino, M.** The theory and phenomenology of polarized deep inelastic scattering [Электронный ресурс] / M. Anselmino, A. Efremov, E. Leader // arXiv:hep-ph/9501369v2.

12. **Anthony, P.L.** Measurements of the Q^2-dependence of the proton and neutron spin structure functions g_1^p and g_1^n [Электронный ресурс] / P.L. Anthony, R.G. Arnold, T. Averett [et al.] // arXiv: arXiv:hep-ph/0007248v1.

13. **Ciofi degli Atti, C.** Spin structure function of the deuteron in the resonance region and the GDH sum rule for the neutron [Электронный ресурс] / C. Ciofi degli Atti, S. Scopetta, A.Yu. Umnikov [et al.] // arXiv:nucl-th/9602026v1.

14. **Melnitchouk, W.** Deep inelastic scattering from polarized deuterons [Text] / W. Melnitchouk, G. Piller and A.W. Thomas // Phys.Lett. B.– 1995.– Vol. 346.– P. 165 – 171.

15. **Umnikov, A.Yu.** Deep inelastic scattering on the deuteron in the Bethe-Salpeter formalism. II. Realistic NN interaction [Электронный ресурс] / A.Yu. Umnikov, F.C. Khanna, L.P. Kaptari // arXiv:hep-ph/9608459v1.

16. База экспериментальных данных HEPDATA по физике высоких энергий, Университет Дарема, Англия [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://durpdg.dur.ac.uk/HEPDATA/PDF.

17. **Glück, M.** Models for the polarized parton distributions of the nucleon [Text] / M. Glück, E. Reya, M. Stratmann [et al.] // Phys. Rev. D.– 2001.– Vol. 63.– P. 094005-1 – 094005-12.

18. **de Florian, D.** Sea quark and gluon polarization in the nucleon at NLO accuracy [Text] / D. de Florian, G.A. Navarro, R. Sassot // Phys. Rev. D.– 2005.– Vol. 71.– P. 094018-1 – 094018-12.

19. **Leader, E.** Impact of CLAS and COMPASS data on polarized parton densities and higher twist [Text] / E. Leader, A.V. Sidorov and D.B. Stamenov // Phys. Rev. D.– 2007.– Vol. 75.– P. 074027-1 – 074027-10.

20. **Anthony, P.L.** Measurement of the deuteron spin structure function $g_1^d(x)$ for 1 (GeV/c)^2< Q^2<40 (GeV/c)^2 [Text] / P.L. Anthony, R.G. Arnold, T. Averett [et al.] // Phys. Lett. B.– 1999.– Vol. 463.– P. 339 – 345.

21. **Abe, K.** Measurements of the proton and deuteron spin structure functions g_1 and g_2 [Text] / K. Abe, T. Akagi, P. L. Anthony [et al.] // Phys. Rev. D.– 1998.– Vol. 58.– P. 112003-1 – 112003-54.

22. **Adeva, B.** Spin asymmetries A_1 and structure functions g_1 of the proton and the deuteron from polarized high energy muon scattering [Text] / B. Adeva, T. Akdogan, E. Arik [et al.] // Phys. Rev. D.– 1998.– Vol. 58.– P. 112001-1 – 112001-17.

23. **Берестецкий, В.Б.** Квантовая электродинамика [Текст] / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1989. – С. 109.

УДК 539.12

В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.М. Редьков

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ВЕКТОРНОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

Квантование движения частиц в однородном магнитном поле – классическая задача теоретической физики [1–3]. За последние 25 лет была детально исследована более общая проблема для пространств с неевклидовой геометрией, гиперболической плоскости Лобачевского H_2 и сферической плоскости Римана S_2 [4–11]. Система оказалась интересной как в рамках классической механики, так и с квантовомеханических позиций. Обобщение анализа на 3-мерные пространства Лобачевского H_3 и Римана S_3 было проведено относительно не-

давно. В работе [12] были построены точные решения уравнения Шредингера с внешними потенциалами, описывающими магнитное поле в H_3 и S_3; движение частицы в таком поле в рамках классической механики было исследовано в [13]. В работе [14] (см. также [15]) было решено уравнение Дирака в магнитном поле на фоне пространств H_3 и S_3.

Разделение переменных в пространстве S_3

В настоящей работе мы обращаемся к анализу аналогичной квантовомеханической задачи для частицы со спином 1.

Исходное квантовомеханическое уравнение для частицы со спином 1 в формализме Даффина – Кеммера, обобщенное на случай пространства-времени с кривизной, имеет следующий вид (используем обозначения, принятые в монографии [16]):

$$\left\{\beta^{(c)}\left[i\hbar\left(e^{\beta}_{(c)}\partial_\beta+\frac{1}{2}J^{ab}\gamma_{abc}\right)-\frac{e}{c}A_c\right]-mc\right\}\Psi=0, \quad (1)$$

где γ_{abc} – коэффициенты вращения Риччи; $A_\alpha=e^{\beta}_{(\alpha)}A_\beta$ – тетрадные компоненты электромагнитного 4-вектора A_β; $J^{ab}=\left(\beta^{(a)}\beta^{(b)}-\right.$ $\left.-\beta^{(b)}\beta^{(a)}\right)$ обозначают генераторы 10-мерного представления группы Лоренца.

Ниже мы используем сокращенные обозначения: $e/c\hbar\Rightarrow e$, $mc/\hbar\Rightarrow M$. Уравнение для векторной частицы в матричной форме Даффина – Кеммера (1) полностью эквивалентно общековариантной тензорной форме уравнений для этой частицы в форме Прока (см. работу [16]):

$$\left(\nabla_\alpha+i\frac{e}{\hbar c}A_\alpha\right)\Phi_\beta-$$

$$-\left(\nabla_\beta+i\frac{e}{\hbar c}A_\beta\right)\Psi_\alpha=\frac{mc}{\hbar}\Phi_{\alpha\beta};$$

$$\left(\nabla^\beta+i\frac{e}{\hbar c}A^\beta\right)\Phi_{\alpha\beta}=\frac{mc}{\hbar}\Phi_\alpha,$$

если преобразовать уравнения (1) к тетрадным компонентам 10-мерной волновой функции

$$\Psi=\left(\Phi_0,\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_{01},\Phi_{02},\Phi_{03},\Phi_{23},\Phi_{31},\Phi_{12}\right),$$

согласно формулам

$$\Phi_a(x)=e^{\alpha}_{(a)}(x)\,\Phi_\alpha(x),$$

$$\Phi_{ab}(x)=e^{\alpha}_{(a)}(x)\,e^{\beta}_{(b)}(x)\,\Phi_{\alpha\beta}(x).$$

М. Олевским в 1950 году [17] были перечислены все разделяющиеся системы координат в трехмерных пространствах постоянной кривизны. В частности, под номером XI приводится следующая система координат:

$$dS^2=c^2dt^2-\rho^2\left[\cos^2 z\left(dr^2+\sin^2 r\,d\varphi^2\right)+dz^2\right],$$

$$z\in\left[-\pi/2,+\pi/2\right],\ r\in\left[0,+\pi\right],\ \varphi\in\left[0,2\pi\right]. \quad (2)$$

Обобщение представления однородного магнитного поля в случае модели S_3 дается выражением [12]

$$A_\varphi=-2B\sin^2\frac{r}{2}=B\left(\cos r-1\right), \quad (3)$$

причем этому потенциалу соответствует неисчезающая компонента электромагнитного поля

$$F_{\varphi r}=\partial_\varphi A_r-\partial_r A_\varphi=B\sin r;$$

этот тензор удовлетворяет уравнениям Максвелла в пространстве S_3.

Рассмотрим уравнение (1) в пространстве S_3. Цилиндрическим координатам $x^\alpha=(t,r,\varphi,z)$ соответствует тетрада

$$e^{\beta}_{(a)}(x)=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&\cos^{-1}z&0&0\\0&0&\cos^{-1}z\sin^{-1}r&0\\0&0&0&1\end{vmatrix};$$

символы Кристоффеля и коэффициенты Риччи задаются следующими матрицами:

$$\Gamma^r_{jk}=\begin{vmatrix}0&0&-\mathrm{tg}\,z\\0&-\sin r\cos r&0\\-\mathrm{tg}\,z&0&0\end{vmatrix};$$

$$\Gamma^\varphi_{jk}=\begin{vmatrix}0&\mathrm{ctg}\,r&0\\\mathrm{ctg}\,r&0&-\mathrm{tg}\,z\\0&-\mathrm{tg}\,z&0\end{vmatrix};$$

$$\Gamma^z_{jk}=\begin{vmatrix}\sin z\cos z&0&0\\0&\sin z\cos z\sin^2 r&0\\0&0&0\end{vmatrix};$$

$$\gamma_{122}=\frac{1}{r\cos z},\ \gamma_{311}=-z,\ \gamma_{322}=-z.$$

Уравнение (1) примет вид

$$\left(i\beta^{(0)}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\cos z}i\beta^{(1)}\frac{\partial}{\partial r}+\right.$$
$$+\frac{\beta^{(2)}}{\cos z}\frac{i\partial_\varphi-eB(\cos r-1)+iJ^{12}\cos r}{\sin r}+ \qquad (4)$$
$$\left.+i\beta^{(3)}\frac{\partial}{\partial z}+i\frac{\sin z}{\cos z}\left(\beta^{(1)}J^{13}+\beta^{(2)}J^{23}\right)-M\right)\Psi=0.$$

Ниже будем использовать матрицы Даффина – Кеммера и генераторы в циклическом базисе (используем блочную запись в соответствии с разбиением 1–3–3–3):

$$\beta^{(0)}=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix};\quad \beta^{(i)}=\begin{vmatrix}0&0&e_i&0\\0&0&0&\tau_i\\-e_i^+&0&0&0\\0&-\tau_i&0&0\end{vmatrix},$$

где e_i, τ_i следуют выражениям (транспонированная строка обозначается $e_i^{\,t}$):

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-i,0,i);\ e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1);$$

$$e_3=(0,i,0);\ \tau_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{vmatrix};$$

$$\tau_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{vmatrix};\ \tau_3=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=s_3.$$

Входящий в уравнение (4) генератор J^{12} диагонален, а именно

$$J^{12}=\beta^{(1)}\beta^{(2)}-\beta^{(2)}\beta^{(1)}=-i\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&\tau_3&0&0\\0&0&\tau_3&0\\0&0&0&\tau_3\end{vmatrix}=-iS_3.$$

Разделение переменных в кулоновском поле

Для волновой функции будем использовать подстановку

$$\Psi=e^{-i\varepsilon t}e^{im\varphi}\begin{vmatrix}\Phi_0(r,z)\\\Phi_j(r,z)\\E_j(r,z)\\H_j(r,z)\end{vmatrix}; \qquad (5)$$

в этом случае уравнение (4) дает (пусть $m+B(1-\cos r)=\nu(r)$) уравнение вида

$$\left[\varepsilon\beta^{(0)}\cos z+i\beta^{(1)}\frac{\partial}{\partial r}-\beta^{(2)}\frac{\nu(r)-S_3\cos r}{\sin r}+\right.$$
$$+i\beta^{(3)}(\cos z)\frac{\partial}{\partial z}+i\left(\beta^{(1)}J^{13}+\beta^{(2)}J^{23}\right)\sin z- \qquad (6)$$
$$\left.-M\cos z\right]\begin{vmatrix}\Phi_0(r,z)\\\Phi_j(r,z)\\E_j(r,z)\\H_j(r,z)\end{vmatrix}=0.$$

После простых вычислений приходим к следующим десяти уравнениям ($\gamma=1/\sqrt{2}$):

$$\gamma\left(\frac{\partial E_1}{\partial r}-\frac{\partial E_3}{\partial r}\right)-\frac{\gamma}{\sin r}\left[(\nu-\cos r)E_1+(\nu+\cos r)E_3\right]-$$
$$-\left((\cos z)\frac{\partial}{\partial z}-2\sin z\right)E_2=M\Phi_0\cos z;$$

$$+i\varepsilon E_1\cos z+i\gamma\frac{\partial H_2}{\partial r}+i\gamma\frac{\nu}{\sin r}H_2+$$
$$+i\left((\cos z)\frac{\partial}{\partial z}-\sin z\right)H_1=M\Phi_1\cos z;$$

$$+i\varepsilon E_2\cos z+i\gamma\left(\frac{\partial H_1}{\partial r}+\frac{\partial H_3}{\partial r}\right)-$$
$$-\frac{i\gamma}{\sin r}\left[(\nu-\cos r)H_1-(\nu+\cos r)H_3\right]=M\Phi_2\cos z;$$

$$+i\varepsilon E_3\cos z+i\gamma\frac{\partial H_2}{\partial r}-i\gamma\frac{\nu}{\sin r}H_2- \qquad (7a)$$
$$-i\left((\cos z)\frac{\partial}{\partial z}-\sin z\right)H_3=M\Phi_3\cos z;$$

$$-i\varepsilon\Phi_1\cos z+\gamma\frac{\partial\Phi_0}{dr}+\gamma\frac{\nu}{\sin r}\Phi_0=ME_1\cos z;$$

$$-i\varepsilon\Phi_2\cos z-\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\cos z=ME_2\cos z;$$

$$-i\varepsilon\Phi_3\cos z-\gamma\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}+\gamma\frac{\nu}{\sin r}\Phi_0=ME_3\cos z;\quad (7б)$$

$$-i\gamma\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}-i\gamma\frac{\nu}{\sin r}\,\Phi_2-$$
$$-i\left((\cos z)\frac{\partial}{\partial z}-\sin z\right)\Phi_1=MH_1\cos z;$$

$$-i\gamma\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\frac{\partial\Phi_3}{\partial r}\right)+\frac{i\gamma}{\sin r}\left[(\nu-\cos r)\,\Phi_1-\right.$$
$$\left.-(\nu+\cos r)\Phi_3\right]=MH_2\cos z;$$

$$-i\gamma\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}+i\gamma\frac{\nu}{\sin r}\Phi_2+$$
$$+i\left((\cos z)\frac{\partial}{\partial z}-\sin z\right)\Phi_3=MH_3\cos z. \quad (7в)$$

С помощью подстановок

$$H_2=\frac{h_2}{\cos^2 z},\ H_1=\frac{h_1}{\cos z},\ H_3=\frac{h_3}{\cos z};$$

$$\Phi_2=\frac{\varphi_2}{\cos^2 z},\ \Phi_1=\frac{\varphi_1}{\cos z},\ \Phi_3=\frac{\varphi_3}{\cos z};$$

$$E_2=\frac{e_2}{\cos^2 z},\ E_1=\frac{e_1}{\cos z},\ E_3=\frac{e_3}{\cos z}; \quad (8)$$

систему можно упростить, и она принимает вид

$$-\hat b_-\,e_1-\hat a_+e_3-\frac{\partial e_2}{\partial z}=M\,(\cos^2 z)\Phi_0;$$

$$-i\hat b_-\,h_1+i\hat a_+\,h_3+i\varepsilon e_2=M\,\varphi_2;$$

$$\frac{i}{\cos^2 z}\hat a\,h_2+i\varepsilon e_1+i\frac{\partial h_1}{\partial z}=M\,\varphi_1;$$

$$-\frac{i}{\cos^2 z}\hat b\,h_2+i\varepsilon e_3-i\frac{\partial h_3}{\partial z}=M\,\varphi_3; \quad (9а)$$

$$\hat a\,\Phi_0-i\varepsilon\varphi_1=M\,e_1;$$

$$-\frac{i}{\cos^2 z}\hat a\,\varphi_2-i\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=Mh_1;$$

$$\hat b\,\Phi_0-i\varepsilon\,\varphi_3=Me_3;$$

$$\frac{i}{\cos^2 z}\hat b\,\varphi_2+i\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}=Mh_3;$$

$$-i\varepsilon\varphi_2-\cos^2 z\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}=Me_2;$$

$$i\hat b_-\,\varphi_1-i\hat a_+\,\varphi_3=Mh_2; \quad (9б)$$

причем здесь использованы следующие обозначения для шести операторов:

$$\gamma\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu-\cos r}{\sin r}\right)=\hat a_-;\quad \gamma\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu+\cos r}{\sin r}\right)=\hat a_+;$$

$$\gamma\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu}{\sin r}\right)=\hat a;\quad \gamma\left(-\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu-\cos r}{\sin r}\right)=\hat b_-;$$

$$\gamma\left(-\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu+\cos r}{\sin r}\right)=\hat b_+;\quad \gamma\left(-\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu}{\sin r}\right)=\hat b.$$

Нерелятивистское приближение

Исключая нединамические переменные $\Phi_0,\ h_1,\ h_2,\ h_3$, получаем шесть уравнений (комбинируем их в пары):

$$\frac{i}{\cos^2 z}\hat a\left(i\hat b_-\,\varphi_1-i\,\hat a_+\varphi_3\right)+i\varepsilon\,Me_1+$$
$$+i\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{i}{\cos^2 z}\hat a\,\varphi_2-i\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)=M^2\,\varphi_1;$$

$$\hat a\,\frac{1}{\cos^2 z}\left(-\hat b_-e_1-\hat a_+\,e_3-\frac{\partial e_2}{\partial z}\right)- \quad (10а)$$
$$-i\varepsilon M\varphi_1=M^2e_1;$$

$$-i\,\hat b_-\left(-\frac{i}{\cos^2 z}\hat a\,\varphi_2-i\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)+i\varepsilon\,Me_2+$$
$$+i\,\hat a_+\left(\frac{i}{\cos^2 z}\hat b\,\varphi_2+i\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)=M^2\,\varphi_2;$$

$$-\cos^2 z\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\cos^2 z}\left(-\hat b_-e_1-a\hat b_+\,e_3-\frac{\partial e_2}{\partial z}\right)- \quad (10б)$$
$$-i\varepsilon\,M\varphi_2=M^2e_2;$$

$$-\frac{i}{\cos^2 z}\hat b\left(i\hat b_-\,\varphi_1-i\hat a_+\,\varphi_3\right)+i\varepsilon Me_3-$$
$$-i\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{i}{\cos^2 z}\hat b\,\varphi_2+i\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)=M^2\varphi_3;$$

$$\hat{b}\,\frac{1}{\cos^2 z}\left(-\hat{b}_-\,e_1-\hat{a}_+\,e_3-\frac{\partial e_2}{\partial z}\right)- \\ -i\varepsilon\,M\varphi_3=M^2 e_3. \qquad (10в)$$

Теперь вводим большие Ψ_i- и малые ψ_i- компоненты [16]:

$$\varphi_1=\Psi_1+\psi_1;\quad ie_1=\Psi_1-\psi_1;$$

$$\varphi_2=\Psi_2+\psi_2;\quad ie_2=\Psi_2-\psi_2;$$

$$\varphi_3=\Psi_3+\psi_3;\quad ie_3=\Psi_3-\psi_3 \qquad (11)$$

и одновременно выделяем энергию покоя формальной подстановкой $\varepsilon\Rightarrow\varepsilon+M$; в результате приходим к следующим уравнениям:

$$-\frac{\hat{a}\hat{b}_-}{\cos^2 z}(\Psi_1+\psi_1)+\frac{\hat{a}\hat{a}_+}{\cos^2 z}(\Psi_3+\psi_3)+ \\ +\frac{\hat{a}}{\cos^2 z}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{2\sin z}{\cos z}\right)(\Psi_2+\psi_2)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Psi_1+\psi_1)+ \\ +(\varepsilon+M)M(\Psi_1-\psi_1)=M^2(\Psi_1+\psi_1);$$

$$-\frac{\hat{a}\hat{b}_-}{\cos^2 z}(\Psi_1-\psi_1)-\frac{\hat{a}\hat{a}_+}{\cos^2 z}(\Psi_3-\psi_3)- \\ -\frac{\hat{a}}{\cos^2 z}\frac{\partial}{\partial z}(\Psi_2-\psi_2)+ \qquad (12а) \\ +(\varepsilon+M)M(\Psi_1+\psi_1)=M^2(\Psi_1-\psi_1);$$

$$-\frac{\hat{b}_-\hat{a}+\hat{a}_+\hat{b}}{\cos^2 z}(\Psi_2+\psi_2)-\hat{b}_-\frac{\partial}{\partial z}(\Psi_1+\psi_1)- \\ -\hat{a}_+\frac{\partial}{\partial z}(\Psi_3+\psi_3)+ \\ +(\varepsilon+M)M(\Psi_2-\psi_2)=M^2(\Psi_2+\psi_2);$$

$$\hat{b}_-(\cos^2 z)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\cos^2 z}(\Psi_1-\psi_1)+ \\ +\hat{a}_+(\cos^2 z)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\cos^2 z}(\Psi_3-\psi_3)+ \qquad (12б) \\ +(\cos^2 z)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\cos^2 z}\frac{\partial}{\partial z}(\Psi_2-\psi_2)+ \\ +(\varepsilon+M)M(\Psi_2+\psi_2)=M^2(\Psi_2-\psi_2);$$

$$\frac{\hat{b}\hat{b}_-}{\cos^2 z}(\Psi_1+\psi_1)-\frac{\hat{b}\hat{a}_+}{\cos^2 z}(\Psi_3+\psi_3)+ \\ +\frac{1}{\cos^2 z}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{2\sin z}{\cos z}\right)\hat{b}(\Psi_2+\psi_2)+ \\ +\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Psi_3+\psi_3)+ \\ +(\varepsilon+M)M(\Psi_3-\psi_3)=M^2(\Psi_3+\psi_3);$$

$$-\frac{\hat{b}\hat{b}_-}{\cos^2 z}(\Psi_1-\psi_1)-\frac{\hat{b}\hat{a}_+}{\cos^2 z}(\Psi_3-\psi_3)- \\ -\frac{\hat{b}}{\cos^2 z}\frac{\partial}{\partial z}(\Psi_2-\psi_2)+ \qquad (12в) \\ +(\varepsilon+M)M(\Psi_3+\psi_3)=M^2(\Psi_3-\psi_3).$$

Складывая и вычитая уравнения в каждой паре, а также пренебрегая малыми компонентами по сравнению с большими, получаем три уравнения для больших компонент:

$$\left(-\frac{2}{\cos^2 z}\hat{a}\hat{b}_-+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon M\right)\Psi_1+ \\ +2\frac{\sin z}{\cos^3 z}\hat{a}\,\Psi_2=0;$$

$$\left(-\frac{2}{\cos^2 z}\hat{b}\hat{a}_++\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon M\right)\Psi_3+ \\ +2\frac{\sin z}{\cos^3 z}\hat{b}\,\Psi_2=0;$$

$$\left(-\frac{1}{\cos^2 z}\left(\hat{b}_-\hat{a}+\hat{a}_+\hat{b}\right)+2\varepsilon M+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\right. \\ \left.+2\frac{\sin z}{\cos z}\frac{\partial}{\partial z}\Psi_2\right)+2\frac{\sin z}{\cos z}\left(\hat{b}_-\Psi_1+\hat{a}_+\Psi_3\right)=0. \qquad (13а)$$

Это система уравнений в паулиевском приближении. В случае плоского пространства она становится намного проще:

$$\left(-2\hat{a}\hat{b}_-+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon M\right)\Psi_1=0;$$

$$\left(-2\hat{b}\hat{a}_++\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon M\right)\Psi_3=0;$$

$$\left(-\left(\hat{b}_-\hat{a}+\hat{a}_+\hat{b}\right)+2\varepsilon M+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi_2=0, \quad (13б)$$

где в определениях для $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{a}_-$, $\hat{b}_-$, $\hat{a}_+$, $\hat{b}_+$ должны быть выполнены соответствующие упрощения.

Уравнения (13а) приводятся к более симметричному виду с использованием простой подстановки $\Psi_2=\cos z\,\bar{\Psi}_2$; таким образом получаем систему

$$\left(-\frac{2\hat{a}\hat{b}_-}{\cos^2 z}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon M\right)\Psi_1+2\frac{\sin z}{\cos^2 z}\hat{a}\,\bar{\Psi}_2=0;$$

$$\left(-\frac{2\hat{b}\hat{a}_+}{\cos^2 z}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon M\right)\Psi_3+2\frac{\sin z}{\cos^2 z}\hat{b}\,\bar{\Psi}_2=0;$$

$$\left(-\frac{\left(\hat{b}_-\hat{a}+\hat{a}_+\hat{b}+2\right)}{\cos^2 z}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon M+1\right)\bar{\Psi}_2+ \quad (13в)$$
$$+2\frac{\sin z}{\cos^2 z}\left(\hat{b}_-\Psi_1+\hat{a}_+\Psi_3\right)=0.$$

С помощью дифференциальных операторов перейдем к новым функциям:

$$\hat{b}_-\Psi_1=G_1; \quad \bar{\Psi}_2=G_2; \quad \hat{a}_+\Psi_3=G_3; \quad (14а)$$

тогда уравнения (13а) примут вид

$$\left(-\frac{2}{\cos^2 z}\hat{b}_-\hat{a}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon M\right)G_1+$$
$$+2\frac{\sin z}{\cos^2 z}\hat{b}_-\hat{a}\,G_2=0;$$

$$\left(-\frac{2}{\cos^2 z}\hat{a}_+\hat{b}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon M\right)G_3+$$
$$+2\frac{\sin z}{\cos^2 z}\hat{a}_+\hat{b}\,G_2=0;$$

$$\left(-\frac{1}{\cos^2 z}(\hat{b}_-\hat{a}+\hat{a}_+\hat{b}+2)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon M+1\right)G_2+ \quad (14б)$$
$$+2\frac{\sin z}{\cos^2 z}\left(G_1+G_3\right)=0.$$

Вводим факторизованное представление для трех функций:

$$G_1=Z_1(z)R_1(r); \quad G_2=Z_2(z)R_2(r);$$
$$G_3=Z_3(z)R_3(r); \quad (15а)$$

тогда уравнения (14б) запишутся следующим образом:

$$\left(-\frac{2}{\cos^2 z}\hat{b}_-\hat{a}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon M\right)Z_1R_1+$$
$$+2\frac{\sin z}{\cos^2 z}\hat{b}_-\hat{a}\,Z_2R_2=0;$$

$$\left(-\frac{2}{\cos^2 z}\hat{a}_+\hat{b}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\varepsilon M\right)Z_3R_3+$$
$$+2\frac{\sin z}{\cos^2 z}\hat{a}_+\hat{b}\,Z_2R_2=0;$$

$$\left(-\frac{1}{\cos^2 z}\left(\hat{b}_-\hat{a}+\hat{a}_+\hat{b}+2\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\right. \quad (15б)$$
$$\left.+2\varepsilon M+1\right)Z_2R_2+2\frac{\sin z}{\cos^2 z}\left(Z_1R_1+Z_3R_3\right)=0.$$

Замечаем, что первое уравнение в системе (15б) не изменится, если подействовать на него слева оператором $\hat{b}_-\hat{a}$; аналогично не изменяется и второе уравнение при действии на него оператором $\hat{a}_+\hat{b}$. Следовательно, можно предположить, что справедливы следующие соотношения:

$$\hat{b}_-\hat{a}R_1=\lambda R_1; \quad \hat{b}_-\hat{a}R_2=\lambda R_2; \quad R_1=R_2=R \quad (16а)$$

и

$$\hat{a}_+\hat{b}R_3=\lambda' R_3; \quad \hat{a}_+\hat{b}R_2=\lambda' R_2; \quad R_2=R_3=R. \quad (16б)$$

Принимая во внимание ограничения, задаваемые системой (15б), приходим к системе уравнений для трех функций, зависящих от z:

$$\left(-\frac{2\lambda}{\cos^2 z}+\frac{d^2}{dz^2}+2\varepsilon M\right)Z_1+2\lambda\frac{\sin z}{\cos^2 z}Z_2=0;$$

$$\left(-\frac{2\lambda'}{\cos^2 z}+\frac{d^2}{dz^2}+2\varepsilon M\right)Z_3+2\lambda'\frac{\sin z}{\cos^2 z}Z_2=0;$$

$$\left(-\frac{1}{\cos^2 z}(\lambda+\lambda'+2)+\frac{d^2}{dz^2}+2\varepsilon M+1\right)Z_2+ \\ +2\frac{\sin z}{\cos^2 z}(Z_1+Z_3)=0. \qquad (17)$$

Учитывая явные выражения для операторов $\hat{a}$, $\hat{a}_+$, $\hat{b}$, $\hat{b}_-$, легко находим равенства

$$\hat{b}_-\hat{a}=\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\cos r}{\sin r}\frac{d}{dr}-B+\frac{\nu^2(r)}{\sin^2 r}\right);$$

$$\hat{a}_+\hat{b}=\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\cos r}{\sin r}\frac{d}{dr}+B+\frac{\nu^2(r)}{\sin^2 r}\right);$$

$$\hat{a}_+\hat{b}=\hat{b}_-\hat{a}-B.$$

Таким образом получаем уравнение относительно R_2:

$$\hat{b}_-\hat{a}\,R_2=\lambda R_2 \quad \Rightarrow \\ \left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\cos r}{\sin r}\frac{d}{dr}+B-\frac{\nu^2(r)}{\sin^2 r}+2\lambda\right)R_2=0. \qquad (18a)$$

Уравнение относительно R_1 имеет тот же вид, если два параметра λ и λ' подчиняются линейному соотношению:

$$\hat{a}_+\hat{b}\,R_2=\lambda' R_2 \quad \Rightarrow \quad \hat{b}_-\hat{a}\,R_2=(\lambda'+B)\,R_2,$$

т. е.

$$\lambda'=\lambda-B. \qquad (18б)$$

Рассмотрим уравнение (18а) детальнее:

$$\frac{d^2}{dr^2}R+\frac{1}{\operatorname{tg} r}\frac{dR}{dr}+(B+2\lambda)R- \\ -\frac{1}{\sin^2 r}\left[m+B(1-\cos r)\right]^2 R=0.$$

В новой переменной $1-\cos r=2y$, $y\in[0,\ 1]$ оно трансформируется в уравнение вида

$$y(1-y)\frac{d^2R}{dy^2}+(1-2y)\frac{dR}{dy}+(B+2\lambda)R- \\ -\frac{1}{4}\left(\frac{m^2}{y}-4B^2+\frac{(m+2B)^2}{1-y}\right)R=0. \qquad (19)$$

Применяем подстановку $R=y^a(1-y)^b\,F$; при этом

$$a=\pm\frac{|m|}{2};\quad b=\pm\frac{|m+2B|}{2};$$

тогда приходим к простому уравнению

$$y(1-y)\,F''+\left[(2a+1)-2(a+b+1)y\right]F'- \\ -\left[a(a+1)+2ab+b(b+1)-B^2-(B+2\lambda)\right]F=0,$$

которое является уравнением гипергеометрического типа:

$$y(1-y)\,F+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)y\right]F'-\alpha\beta F=0.$$

Параметры гипергеометрической функции $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ определены равенствами

$$\gamma=+|m|+1,\ a=+\frac{|m|}{2},\ b=+\frac{|m+2B|}{2};$$

$$\alpha=a+b+\frac{1}{2}-\sqrt{\left(B+\frac{1}{2}\right)^2+2\lambda};$$

$$\beta=a+b+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(B+\frac{1}{2}\right)^2+2\lambda}.$$

Чтобы иметь решения в виде полиномов, следует наложить условие $\alpha=-n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ ...)$; тогда

$$a+b+\frac{1}{2}-\sqrt{\left(B+\frac{1}{2}\right)^2+2\lambda}=-n; \qquad (20a)$$

отсюда следует правило квантования:

$$2\lambda+\left(B+\frac{1}{2}\right)^2=\left(a+b+\frac{1}{2}+n\right)^2>0. \qquad (20б)$$

Соответствующие решения задаются согласно выражению

$$R=\left(\sin\frac{r}{2}\right)^{+|m|}\left(\cos\frac{r}{2}\right)^{+|m+2B|}\times \\ \times F\left(-n,|m|+|m+2B|+1+n,|m|+1;-\sin^2\frac{r}{2}\right). \qquad (20в)$$

Если воспользоваться обозначением $\lambda=\Lambda-B/2$, формула для спектра запишется в виде

$$2\Lambda + B^2 = N(N+1);\ \ N = a+b+n. \quad (20г)$$

Поведение решений по переменной *z* около особых точек

Обратимся к анализу системы (17); в переменной $\sin z = x$ она примет вид

$$\left[\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx} - \frac{2\lambda}{1-x^2} + 2\varepsilon M\right]Z_1 + \frac{2\lambda x}{1-x^2}\bar{Z}_2 = 0;$$

$$\left[\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx} - \frac{2\lambda'}{1-x^2} + 2\varepsilon M\right]Z_3 + \frac{2\lambda' x}{1-x^2}\bar{Z}_2 = 0;$$

$$\left[\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx} - \frac{2+\lambda+\lambda'}{1-x^2} + 2\varepsilon M + 1\right]\times \times \bar{Z}_2 + \frac{2x}{1-x^2}\left(Z_1 + Z_3\right) = 0. \quad (21)$$

Около точки $z = +\pi/2 (x \to +1)$ система упрощается:

$$\left[2(1-x)\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} - \frac{\lambda}{1-x}\right]Z_1 + \frac{\lambda}{1-x}\bar{Z}_2 = 0;$$

$$\left[2(1-x)\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} - \frac{\lambda'}{1-x}\right]Z_3 + \frac{\lambda'}{1-x}\bar{Z}_2 = 0;$$

$$\left[2(1-x)\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} - \frac{2+\lambda+\lambda'}{1-x}\right]\bar{Z}_2 + \frac{1}{1-x}(Z_1 + Z_3) = 0;$$

возможное решение выглядит следующим образом:

$$Z_1 = A_1(1-x)^a;\ \ \bar{Z}_2 = A_2(1-x)^a;$$

$$Z_3 = A_3(1-x)^a. \quad (22а)$$

Для параметров A_1, A_2, A_3 получаем линейную систему

$$\left(2a^2 - a - \lambda\right)A_1 + \lambda A_2 = 0;$$

$$\left(2a^2 - a - \lambda'\right)A_3 + \lambda' A_2 = 0;$$

$$\left(2a^2 - a - \frac{2+\lambda+\lambda'}{2}\right)A_2 + A_1 + A_3 = 0. \quad (22б)$$

Аналогично рассматриваем уравнения около второй особой точки $x \to -1$:

$$Z_1 = B_1(1+x)^b;\ \ \bar{Z}_2 = B_2(1+x)^b;\ \ Z_3 = B_3(1+x)^b \quad (23а)$$

и

$$\left(2b^2 - b - \lambda\right)B_1 - \lambda B_2 = 0;$$

$$\left(2b^2 - b - \lambda'\right)B_3 - \lambda' B_2 = 0;$$

$$\left(2b^2 - b - \frac{2+\lambda+\lambda'}{2}\right)B_2 - B_1 - B_3 = 0. \quad (23б)$$

Удобно ввести новые обозначения:

$$2a^2 - a = A;\ \ 2b^2 - b = B;$$

тогда две линейные системы запишутся как

$$(A-\lambda)A_1 + \lambda A_2 = 0;$$

$$(A-\lambda')A_3 + \lambda' A_2 = 0;$$

$$\left(A - \frac{2+\lambda+\lambda'}{2}\right)A_2 + A_1 + A_3 = 0;$$

$$(B-\lambda)B_1 - \lambda B_2 = 0;$$

$$(B-\lambda')B_3 - \lambda' B_2 = 0;$$

$$\left(B - \frac{2+\lambda+\lambda'}{2}\right)B_2 - B_1 - B_3 = 0.$$

Далее мы получаем одинаковые уравнения для собственных значений *A* и *B*:

$$(A-\lambda)\lambda' + (A-\lambda')\lambda - (A-\lambda)(A-\lambda')\left(A - \frac{2+\lambda+\lambda'}{2}\right) = 0;$$

$$(B-\lambda)\lambda' + (B-\lambda')\lambda - (B-\lambda)(A-\lambda')\left(B - \frac{2+1+\lambda'}{2}\right) = 0 \quad (24)$$

и соответствующие решения

$$A_1 = A_2\frac{\lambda}{\lambda - A};\quad A_3 = A_2\frac{\lambda'}{\lambda' - A}; \qquad (25а)$$

$$B_1 = -B_2\frac{\lambda}{\lambda - B};\ B_3 = -B_2\frac{\lambda'}{\lambda' - B}. \qquad (25б)$$

Построим решения кубических уравнений; для определенности рассматриваем уравнение для A:

$$2(A-\lambda)\lambda' + 2(A-\lambda')\lambda - (A-\lambda)(A-\lambda')(2A-2-\lambda-\lambda') = 0,$$

т. е.

$$-2A^3 + A^2\left[2+3(\lambda+\lambda')\right] - A\left[(\lambda+\lambda')^2 + 2\lambda\lambda'\right] + \lambda\lambda'\left[(\lambda+\lambda')-2\right] = 0. \qquad (26а)$$

Учитывая равенство $\lambda' = \lambda - B$, введем новый параметр

$$\lambda' - \frac{B}{2} = \lambda + \frac{B}{2} \equiv \Lambda;\quad \lambda + \lambda' = 2\Lambda;$$

$$\lambda\lambda' = \Lambda^2 - \frac{B^2}{4};$$

тогда уравнение (26а) примет вид

$$A^3 - A^2(3\Lambda+1) + A\left(3\Lambda^2 - \frac{B^2}{4}\right) - \left(\Lambda^2 - \frac{B^2}{4}\right)(\Lambda - 1) = 0, \qquad (26б)$$

т. е. символически

$$A^3 + aA^2 + bA + c = 0,$$

где

$$a = -(3\Lambda+1);\quad b = \left(3\Lambda^2 - \frac{B^2}{4}\right);$$

$$c = -\left(\Lambda^2 - \frac{B^2}{4}\right)(\Lambda - 1).$$

Введем новую переменную Y:

$$A = Y - \frac{a}{3};$$

затем убираем из кубического уравнения квадратичный член

$$Y^3 + pY + q = 0; \qquad (27а)$$

$$p = -\frac{a^2}{3} + b = -\left(2\Lambda + \frac{B^2}{4} + \frac{1}{3}\right);$$

$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = -\left(\frac{2}{3}\Lambda + \frac{B^2}{3} + \frac{2}{27}\right). \qquad (27б)$$

Отмечаем существенные неравенства:

$$p < 0,\quad q < 0,\quad |p| > |q|.$$

Дальнейший анализ приводит к трем вещественным корням:

$$Y_1 = \sqrt{-p/3}\left(2\cos\frac{\varphi}{3}\right);$$

$$Y_2 = \sqrt{-p/3}\left(-\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right);$$

$$Y_3 = \sqrt{-p/3}\left(-\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right), \qquad (28а)$$

где

$$\cos\varphi = \frac{-q/2}{(-p/3)^{3/2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(-p/3)^3 - (q/2)^2}}{(-p/3)^{3/2}}. \qquad (28б)$$

К сожалению, к настоящему времени существенного дальнейшего прогресса в решении полученной системы уравнений по z достичь не удалось.

Проведенный анализ без труда обобщается на случай пространства постоянной отрицательной кривизны – пространства Лобачевского H_3. Также отметим, что развитая схема разделения переменных применима не только для нерелятивистского приближения, но и в релятивистском случае.

Добавим, что задача о поведении частицы со спином 1 во внешнем магнитном поле решается точно при ограничении на двумерные пространства постоянной кривизны, сферическую и гиперболическую плоскости.

Таким образом, в пространстве с постоянной положительной кривизной исследовано квантовомеханическое волновое уравнение для частицы со спином 1 во внешнем магнитном поле. Выполнена процедура разделения переменных t, r, φ, z. Решения уравнений по переменной r строятся в гипергеометрических функциях. Исследование зависимости волновой функции от переменной z доведено до системы трех связанных между собой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для трех функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Rabi, I.I.** Das freie Electron in Homogenen Magnetfeld nach der Diraschen Theorie [Text] / I.I. Rabi // Z. Phys. – 1928. – Vol. 49. – P. 507–511.

2. **Landau, L.** Diamagnetismus der Metalle [Text] / L. Landau // Ztshr. Phys. – 1930. – Bd. 64. – S. 629–637.

3. **Plesset, M.S.** Relativistic wave mechanics of the electron deflected by magnetic field [Text] / M.S. Plesset // Phys.Rev. – 1931. – P. 1728–1731.

4. **Comtet, A.** Effective action on the hyperbolic plane in a constant external field [Text] / A. Comtet, P.J. Houston // J. Math. Phys. – 1985. – Vol. 26. – № 1. – P. 185–191.

5. **Comtet, A.** On the Landau levels on the hyperbolic plane [Text] / A. Comtet, P.J. Houston // Annals of Physics. – 1987. – Vol. 173. – P. 185–209.

6. **Aoki, H.** Quantized Hall effect [Text] / H. Aoki // Rep. Progr. Phys. – 1987. – Vol. 50. – P. 655–730.

7. **Groshe, C.** Path integral on the Poincaré upper half plane with a magnetic field and for the Morse potential [Text] / C. Groshe // Ann. Phys. (N.Y.). – 1988. – Vol. 187. – P. 110–134.

8. **Klauder, J.R.** Landau levels and geometric quantization [Text] / J.R. Klauder, E. Onofri // Int. J. Mod. Phys. – 1989. – Vol. A4. – P. 3939–3949.

9. **Avron, J.E.** Landau Hamiltonians on symmetric spaces [Text] / J.E. Avron, A. Pnueli // Ideas and methods in mathematical analysis, stochastics, and applications / S. Alverio [et al.], eds. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. – Vol. II. – P. 96–117.

10. **Plyushchay, M.S.** Relativistic particle with torsion and charged particle in a constant electromagnetic field: Identity of evolution [Text] / M.S. Plyushchay // Mod. Phys. Lett. – 1995. – Vol. A10. – P. 1463–1469.

11. **Alimohammadi, M.** Quantum group symmetry of the quantum Hall effect on the non-flat surfaces [Text] / M. Alimohammadi, A.Shafei Deh Abad // J. Phys. – 1996. – Vol. A29. – P. 559.

12. **Bogush, A.A.** Schrödinger particle in magnetic and electric fields in Lobachevsky and Riemann spaces [Text] / A.A. Bogush, V.M. Red'kov, G.G. Krylov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2008. – Vol. 11. – № 4. – P. 403–416.

13. **Kudryashov, V.V.** Classical particle in presence of magnetic field, hyperbolic Lobachevsky and spherical Riemann models [Text] / V.V. Kudriashov, Yu.A. Kurochkin, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // SIGMA. – 2010. – Vol. 6, 004. – 34 p.

14. **Овсиюк, Е.М.** О решениях уравнения Дирака в однородном магнитном поле в пространстве Лобачевского [Текст] / Е.М. Овсиюк, В.В. Кисель, В.М. Редьков // Доклады НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54. – № 3. – С. 47–54.

15. **Red'kov, V.M.** Quantum mechanics in spaces of constant curvature [Text] / V.M. Red'kov, E.M. Ovsiyuk. – Nova Science Publishers, 2012 (in press).

16. **Редьков, В.М.** Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца [Текст] / В.М. Редьков. – Минск: Белорус. наука, 2009. – 495 с.

17. **Олевский, М.Н.** Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение $\Delta_2 U + \lambda U = 0$ допускает полное разделение переменных [Текст] / М.Н. Олевский // Матем. сб. – 1950. – Т. 27. – С. 379–426.

УДК 539.12

Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.В. Кисель, В.М. Редьков

НОВЫЕ ЗАДАЧИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И УРАВНЕНИЕ ГОЙНА

В настоящей работе мы обсудим некоторые новые и старые задачи квантовой механики и теории поля, приводящие к необходимости исследовать решения дифференциального урав-

нения Гойна [1]. За последние двадцать лет количество физических задач, для анализа которых требуется привлечение этого класса специальных функций, непрерывно растет [2, 3]. Примерами могут служить задача двух центров в квантовой механике, описание квантовомеханических частиц в гравитационных полях Шварцшильда и Керра и другие.

Иногда необходимость работать с уравнением Гойна можно обойти. Примерами являются следующие системы: атом водорода на основе уравнения Дирака в пространстве Минковского [4]; электромагнитные цилиндрические волны в пространствах S_3, H_3 [5]; частица со спином 1/2 в поле монопольного потенциала в мире де Ситтера [6]; электромагнитное поле в пространстве Лобачевского H_3 [7].

Но нередко обойти такую необходимость нельзя. Примерами являются следующие задачи: атом водорода в пространствах де Ситтера и анти-де Ситтера [8]; электромагнитное поле в поле черной дыры Шварцшильда [9]; паулиевская частица в кулоновском поле в пространствах S_3, H_3 [10]; скалярная частица с зарядом и поляризуемостью в кулоновском поле [11]; частица со спином 1 в кулоновском поле [12].

Иногда система сводится к уравнению с шестью особыми точками; примером является атом водорода на основе уравнения Дирака в пространствах S_3, H_3 [4].

Две из перечисленных систем, а именно электромагнитное поле в пространстве Лобачевского и частица со спином 1 в кулоновском поле, рассмотрены в настоящей статье.

Моделирование среды со специальными отражающими свойствами в рамках геометрии Лобачевского

В работе Олевского [13] под номером II приведена следующая система координат в пространстве Лобачевского H_3:

$$dS^2 = dt^2 - e^{-2z}\left(dx^2 + dy^2\right) - dz^2,$$

$$u_1 = xe^{-z}, \quad u_2 = ye^{-z},$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left[\left(e^z - e^{-z}\right) + \left(x^2 + y^2\right)e^{-z}\right],$$

$$u_0 = \frac{1}{2}\left[\left(e^z + e^{-z}\right) + \left(x^2 + y^2\right)e^{-z}\right];$$

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = \rho^2, \quad u_0 = +\sqrt{\rho^2 + \mathbf{u}^2}. \quad (1)$$

Далее нам полезна трехмерная реализация Пуанкаре для этого пространства как внутренности трехмерной сферы:

$$q_i = \frac{u_i}{u_0}, \quad q_i q_i < +1;$$

$$x = \frac{q_1}{1-q_3}, \quad y = \frac{q_2}{1-q_3}, \quad e^z = \frac{\sqrt{1-q^2}}{1-q_3}. \quad (2)$$

В частности, на оси $q_1 = 0, \ q_2 = 0 \ \ q \in (-1,+1)$ эти соотношения дают

$$x = 0, \quad y = 0, \quad e^z = \sqrt{\frac{1+q_3}{1-q_3}};$$

$$q_3 \to +1, \quad e^z \to +\infty, \quad z \to +\infty;$$

$$q_3 \to -1, \quad e^z \to +0, \quad z \to -\infty.$$

Известно, что с электродинамической точки зрения геометрия Лобачевского моделирует специальную среду [14] с тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости вида

$$\varepsilon^{ik}(x) = -\sqrt{-g}\; g^{00}(x) g^{ik}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2z} \end{vmatrix};$$

$$\left(\mu^{-1}\right)^{ik}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2z} \end{vmatrix}.$$

Соответствующие материальные уравнения (в системе СИ) выглядят следующим образом:

$$D^i = \varepsilon_0 \varepsilon^{ik} E_k, \quad B_i = \mu_0 \mu^{ik} H^k, \quad \varepsilon^{ik}(x) = \mu^{ik}(x).$$

Для описания электромагнитного поля в пространстве Лобачевского будем использовать комплексный формализм Римана – Зильберштейна – Майораны–Оппенгеймера (детальнее см. работу [14]):

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t}+\alpha^{(1)}e^{z}\frac{\partial}{\partial x}+\alpha^{(2)}e^{z}\frac{\partial}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+\alpha^{(3)}\frac{\partial}{\partial z}-\alpha^{(1)}s_2+\alpha^{(2)}s_1\right)\left|\begin{matrix}0\\ \mathrm{E}+i\mathrm{B}\end{matrix}\right|=0; \qquad (3)$$

явный вид используемых матриц следующий:

$$\alpha^{(1)}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{vmatrix};\quad \alpha^{(2)}=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{vmatrix};$$

$$\alpha^{(3)}=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{vmatrix};\quad s_1=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{vmatrix};$$

$$s_2=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{vmatrix}.$$

Разделение переменных проводится на основе подстановки

$$\left|\begin{matrix}0\\ \mathbf{E}+i\mathbf{B}\end{matrix}\right|=e^{-i\omega t}\,e^{ik_1x}\,e^{ik_2y}\left|\begin{matrix}0\\ \mathbf{f}(z)\end{matrix}\right|.$$

Система уравнений для f_i следующая:

$$ik_1\,e^{z}f_1+ik_2\,e^{z}f_2+\left(\frac{d}{dz}-2\right)f_3=0;$$

$$-\omega f_1-\left(\frac{d}{dz}-1\right)f_2+ik_2\,e^{z}\,f_3=0;$$

$$-\omega f_2+\left(\frac{d}{dz}-1\right)f_1-ik_1\,e^{z}\,f_3=0;$$

$$-\omega f_3-e^{z}\,ik_2f_1+ik_1\,e^{z}\,f_2=0.$$

Первое уравнение принимает вид тождества при учете трех остальных, поэтому его можно не учитывать. С использованием подстановки $f_1=e^{z}F_1(z)$, $f_2=e^{z}F_2(z)$ приводим три уравнения к более простому виду:

$$f_3=\frac{-ib}{\omega}e^{2z}F_1+\frac{ia}{\omega}e^{2z}F_2;$$

$$\left(\frac{d}{dz}+\frac{ab\,e^{2z}}{\omega}\right)F_2=\frac{b^2e^{2z}-\omega^2}{\omega}F_1;$$

$$\left(\frac{d}{dz}-\frac{ab\,e^{2z}}{\omega}\right)F_1=\frac{\omega^2-a^2e^{2z}}{\omega}F_2. \qquad (4)$$

С использованием переменной $e^{z}=\sqrt{\omega}Z$ два последних уравнения запишутся следующим образом:

$$Z\left(\frac{d}{dZ}+ab\,Z\right)F_2=+\left(b^2Z^2-\omega\right)F_1;$$

$$Z\left(\frac{d}{dZ}-ab\,Z\right)F_1=-\left(a^2Z^2-\omega\right)F_2. \qquad (5)$$

Эта система может быть решена в терминах вырожденных функций Гойна. В самом деле,

$$\frac{d^2F_1}{dZ^2}-\frac{a^2Z^2+\omega}{Z\left(a^2Z^2-\omega\right)}\frac{dF_1}{dZ}+$$
$$+\left[\frac{\omega^2}{Z^2}+\frac{2ab\,\omega}{a^2Z^2-\omega}-\left(a^2+b^2\right)\omega\right]F_1=0. \qquad (6)$$

Отмечаем присутствие дополнительных сингулярных точек $Z=\pm\sqrt{\omega}/a.$. С новой переменной это уравнение принимает вид

$$y=\frac{a^2Z^2}{\omega};$$

$$\frac{d^2F_1}{dy^2}+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y-1}\right)\frac{dF_1}{dy}+\left[\frac{\omega^2}{4y^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{2ab\,\omega+\left(a^2+b^2\right)\omega^2}{4a^2y}+\frac{b\omega}{2a(y-1)}\right]F_1=0.$$

Далее, используя подстановку $F_1(y)=$ $=y^{c}\,g_1(y)$ при $c=\pm i\omega/2$, приходим к уравнению

$$\frac{d^2 g_1}{dy^2}+\left(\frac{2c+1}{y}-\frac{1}{y-1}\right)\frac{dg_1}{dy}+\left[\frac{-2c+b\omega/a}{2(y-1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{2c-\omega^2/2-b\omega/a-b^2\omega^2/(2a^2)}{2y}\right]g_1=0;$$

последнее может быть отождествлено с вырожденным уравнением Гойна для функции $g_1=H(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta,z)$:

$$\frac{d^2H}{dz^2}+\left(\alpha+\frac{1+\beta}{z}+\frac{1+\gamma}{z-1}\right)\frac{dH}{dz}+$$
$$+\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha+\alpha\beta-\beta\gamma-\beta-\gamma-2\eta}{z}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\alpha\gamma+\beta+\alpha+2\eta+2\delta+\beta\gamma+\gamma}{z-1}\right)H=0;$$

$$\alpha=0,\quad \beta=2c,\quad \gamma=-2,$$

$$\delta=-\frac{1}{4}\frac{(a^2+b^2)\omega^2}{a^2},$$

$$\eta=\frac{1}{4}\frac{2ab\,\omega+(a^2+b^2)\omega^2+4a^2}{a^2};$$

$$F_1=y^{\pm i\omega/2}\,H(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta,y). \qquad (7)$$

Покажем, каким образом систему (5) можно решить в функциях Бесселя. Для этого совершим линейное преобразование

$$F_1=+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}G_1+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}G_2;$$

$$F_2=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}G_1+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}G_2; \qquad (8)$$

в результате система (5) примет вид

$$Z\frac{d}{dZ}G_1=\omega G_2;$$

$$Z\frac{d}{dZ}G_2=\left[Z^2(a^2+b^2)-\omega\right]G_1. \qquad (9)$$

Из системы (9) следует уравнение второго порядка для G_1:

$$\left(Z^2\frac{d^2}{dZ^2}+Z\frac{d}{dZ}+\omega^2-\omega(a^2+b^2)Z^2\right)G_1=0.$$

Преобразуем его к другой переменной:

$$e^z=\sqrt{\omega}Z;\quad \left(\frac{d^2}{dz^2}+\omega^2-(a^2+b^2)e^{2z}\right)G_1=0. \quad (10)$$

Полученное уравнение можно рассматривать как одномерное шредингеровское:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+E-U(z)\right)f(z)=0$$

с потенциальной функцией

$$U(z)=(a^2+b^2)e^{2z}.$$

Отметим, что в частном случае $a=k_1=0$, $b=k_2=0$ эффективное потенциальное поле исчезает. Форма потенциальной функции показана на рисунке.

Поскольку в квантовой механике частица в таком потенциальном поле должна испытывать отражение от барьера, то можно ожидать аналогичного явления и для электромагнитного поля; это действительно имеет место. Интересной особенностью данной аналогии является равенство единице коэффициента отражения для всех состояний (за исключением особого случая $a=b=0$). Такая ситуация более подробно рассмотрена в работе [7]; эффективно геометрия Лобачевского моделирует идеальное зеркало, распределенное в пространстве. Легко оценить глубину проникновения электромагнитного поля в такую эффективную зеркально

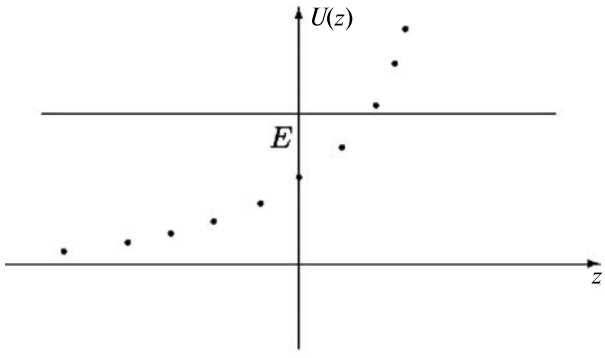


График потенциальной функции $U(z)$

отражающую среду. Эта глубина определяется путем решения уравнения

$$\omega^2 = \left(a^2 + b^2\right) e^{2z_0}; \quad z_0 = \rho \ln \frac{\omega}{c\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \quad (11)$$

где ρ – радиус кривизны пространства Лобачевского.

Частица со спином 1 в кулоновском поле

К настоящему времени анализ известной задачи о частице со спином 1 во внешнем кулоновском поле все еще остается далеким от своего завершения. Покажем, что есть возможность свести (хотя бы часть этого анализа) к классу функций Гойна (детальнее см. работу [12]).

Будем использовать матричный формализм Даффина – Кеммера (с применением тетрадной техники [15]):

$$\left[\beta^{(0)}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right) + i\left[\beta^{(3)}\partial_r + \frac{1}{r}\left(\beta^{(1)} j^{31} + \beta^{(2)} j^{32}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r} K_{\theta,\varphi} - M\right]\Phi(x) = 0, \quad (12)$$

где угловой оператор $K_{\theta,\varphi}$ задан согласно [15]

$$K_{\theta,\varphi} = i\,\beta^1\partial_\theta + \beta^2\,\frac{i\partial_\varphi + i\,j^{12}\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Десятикомпонентная волновая функция

$$\Psi(x) = \left\{\Phi_0(x), \Phi_i(x), E_i(x), H_i(x)\right\}$$

выбирается в виде

$$\Phi_0(x) = e^{-iEt/\hbar}\,\Phi_0(x)\,D_0;$$

$$\left(\Phi_j(x)\right) = e^{-iEt/\hbar}\begin{vmatrix}\Phi_1(r)\,D_{-1}\\ \Phi_2(r)\,D_0\\ \Phi_3(r)\,D_{+1}\end{vmatrix};$$

$$\left(E_j(x)\right) = e^{-iEt/\hbar}\begin{vmatrix}E_1(r)\,D_{-1}\\ E_2(r)\,D_0\\ E_3(r)\,D_{+1}\end{vmatrix};$$

$$\left(H_j(x)\right) = e^{-iEt/\hbar}\begin{vmatrix}H_1(r)\,D_{-1}\\ H_2(r)\,D_0\\ H_3(r)\,D_{+1}\end{vmatrix}. \quad (13)$$

Используем краткие обозначения для функций Вигнера:

$$D_\sigma = D^j_{-m,\sigma}(\phi, \theta, 0); \quad \sigma = 0, +1, -1.$$

После простых алгебраических вычислений с применением известных свойств функций Вигнера приходим к системе из десяти радиальных уравнений:

$$-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 - \frac{\nu}{r}\left(E_1 + E_3\right) = M\Phi_0;$$

$$+i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = M\Phi_1;$$

$$+i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 - i\frac{\nu}{r}\left(H_1 - H_3\right) = M\Phi_2;$$

$$+i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_3 - i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_3 - i\frac{\nu}{r}H_2 = M\Phi_3;$$

$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 - ME_1 = 0;$$

$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2 - \frac{d}{dr}\Phi_0 - ME_2 = 0;$$

$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_3 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 - ME_3 = 0;$$

$$-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_1 - i\frac{\nu}{r}\Phi_2 - MH_1 = 0;$$

$$+i\frac{\nu}{r}\left(\Phi_1 - \Phi_3\right) - MH_2 = 0;$$

$$+i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_3 + i\frac{\nu}{r}\Phi_2 - MH_3 = 0, \quad (14)$$

где $\nu = \sqrt{j(j+1)/2}$.

Будем дополнительно диагонализировать оператор пространственной четности (преобразованный от обычного представления к базису сферической тетрады):

$$\widehat{\Pi} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Pi_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Pi_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\Pi_3\end{vmatrix}\widehat{P}; \quad \Pi_3 = \begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Уравнение на собственные значения $\widehat{\Pi}\Psi = P\,\Psi$ приводит к двум значениям четности и соответствующим ограничениям на радиальные функции:

1) $P = (-1)^{j+1}$.

$$\Phi_0 = 0\,,\ \Phi_3 = -\Phi_1\,,\ \Phi_2 = 0\,,$$

$$E_3 = -E_1\,,\ \ E_2 = 0,\ \ H_3 = H_1\,;$$

2) $P = (-1)^{j}$.

$$\Phi_3 = \Phi_1\,,\ E_3 = +E_1\,,\ \ H_3 = -H_1\,,\ \ H_2 = 0\,. \quad (15)$$

В первом случае для состояний с четностью $P = (-1)^{j+1}$ имеем четыре уравнения:

$$+i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = M\Phi_1;$$

$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1 = ME_1;$$

$$-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_1 = MH_1;$$

$$2i\frac{\nu}{r}\Phi_1 = MH_2. \quad (16)$$

Исключая E_1, H_1, H_2, приходим к уравнению второго порядка для Φ_1:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)^2 - M^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]\Phi_1 = 0,$$

что совпадает с уравнением, возникающим в случае скалярной частицы, описываемой уравнением Клейна – Фока – Гордона. Его решение хорошо известно, ему отвечает спектр энергии

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \alpha^2 / N^2}}, \quad (17)$$

где

$$N = n_r + \frac{1}{2} + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \alpha^2}\,.$$

Для состояний с четностью $P = (-1)^{j}$ имеем шесть уравнений:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 + 2\frac{\nu}{r}E_1 + M\Phi_0 = 0;$$

$$+i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 - M\Phi_1 = 0;$$

$$+i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 - 2i\frac{\nu}{r}H_1 - M\Phi_2 = 0;$$

$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 - ME_1 = 0;$$

$$i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2 + \frac{d}{dr}\Phi_0 + ME_2 = 0;$$

$$i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)\Phi_1 + i\frac{\nu}{r}\Phi_2 + MH_1 = 0. \quad (18)$$

К этому классу принадлежат и состояния с минимальным $j = 0$, и в этом случае задача решается просто. Действительно, подстановка для волновой функции (13) существенно упрощается и принимает вид

$$\Phi_0 = e^{-iEt/\hbar}\Phi_0(r);$$

$$\left(\Phi_j(x)\right) = e^{-iEt/\hbar}\begin{vmatrix} 0 \\ \Phi_2(r) \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$\left(E_j(x)\right) = e^{-iEt/\hbar}\begin{vmatrix} 0 \\ E_2(r) \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$\left(H_j(x)\right) = e^{-iEt/\hbar}\begin{vmatrix} 0 \\ H_2(r) \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Угловой оператор действует на эти состояния как нулевой, а четность состояний равна $P = (-1)^{0+1} = -1$. Радиальные уравнения приводят к единственному уравнению для E_2:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{2}{r^2} + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)^2 - M^2\right)E_2 = 0,$$

которое дает спектр

$$E_n = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \alpha^2 / (\Gamma + n)^2}}, \quad (20)$$

где

$$2\Gamma = 1 + \sqrt{9 - 4\alpha^2}.$$

С анализом системы (18) удается продвинуться дальше, если воспользоваться обобщенным условием Лоренца

$$\left(\nabla_\alpha + i\frac{e}{c}A_\alpha\right)\Psi^\alpha = i\frac{e}{2cM}F_{\alpha\beta}\Psi^{\alpha\beta}. \qquad (21)$$

После преобразования к радиальным функциям это соотношение дает равенство

$$-i\varepsilon\Phi_0 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\Phi_2 - \frac{\nu}{r}\left(\Phi_1 + \Phi_3\right) = i\frac{\alpha}{2Mr^2}E_2.$$

Для всех состояний с четностью $P = (-1)^{j+1}$ оно удовлетворяется тождественно. Для состояний с четностью $P = (-1)^j$ это соотношение дает

$$-i\varepsilon\Phi_0 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\Phi_2 - \frac{2\nu}{r}\Phi_1 = i\frac{\alpha}{2Mr^2}E_2. \qquad (22)$$

С помощью последнего из (18) можно вывести простое соотношение

$$E_2 = -2Mr\,\Phi_0\,. \qquad (23)$$

С помощью (23) из системы (18) можно выразить пять функций, а именно Φ_1, Φ_2, E_1, E_2, H_1, через одну основную:

$$E_2 = -2Mr\,\Phi_0;$$

$$E_1 = \frac{Mr}{2\nu}\left(5 + 2r\frac{d}{dr}\right)\Phi_0;$$

$$\Phi_1 = \frac{-i}{\varepsilon + \alpha/r}\left(\frac{\nu}{r} - \frac{5M^2}{2\nu}r - \frac{r^2M^2}{\nu}\frac{d}{dr}\right)\Phi_0;$$

$$\Phi_2 = \frac{i}{\varepsilon + \alpha/r}\left(\frac{d}{dr} - 2M^2r\right)\Phi_0;$$

$$H_1 = -\frac{Mr}{2\nu}\frac{1}{\varepsilon + \alpha/r}\times \left\{\frac{d}{dr} + 2r\left[\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)^2 - M^2\right]\right\}\Phi_0. \qquad (24)$$

Для основной функции Φ_0 можно получить следующее уравнение:

$$\frac{d^2\Phi_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\left(3 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \alpha/r}\right)\frac{d\Phi_0}{dr} + \left(\varepsilon^2 - \frac{\alpha^2}{r^2} - 3M^2 + 2M^2\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \alpha/r} - \frac{2\nu^2}{r^2}\right)\Phi_0 = 0. \qquad (25)$$

Введем новую переменную

$$x = -\frac{\varepsilon}{\alpha}r < 0, \quad r = -\frac{\alpha}{\varepsilon}x;$$

уравнение (25) запишется как

$$\frac{d^2\Phi_0}{dx^2} + \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1}\right)\frac{d\Phi_0}{dx} + \left(\alpha^2 - \Lambda^2 - \frac{\alpha^2 + 2\nu^2}{x^2} + \frac{2\Lambda^2}{x-1}\right)\Phi_0 = 0, \qquad (26)$$

где использован безразмерный параметр

$$\Lambda^2 = \alpha^2\frac{m^2c^4}{E^2}.$$

Воспользуемся подстановкой

$$\Phi_0(x) = x^A e^{Bx} f(x)$$

при ограничениях на A и B:

$$A = -1 + \sqrt{1 + 2\nu^2 + \alpha^2};\ B = +\sqrt{\Lambda^2 - \alpha^2};$$

для функции f получим уравнение

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \left(2B + \frac{2A+3}{x} - \frac{1}{x-1}\right)\frac{df}{dx} + \left(\frac{2AB + A + 3B}{x} + \frac{A + B - 2\Lambda^2}{1-x}\right)f = 0, \qquad (27)$$

которое может быть сопоставлено с уравнением для вырожденной функции Гойна $f = f(a, b, c, d, h; z)$:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \left(a + \frac{b+1}{x} + \frac{c+1}{x-1}\right)\frac{df}{dx} - \frac{a(1+b)}{2x(x-1)}f - \frac{\left[-2d + a(-b-c-2)\right]x + b(-1-c) - c - 2h}{2x(x-1)}f = 0$$

с параметрами

$$a = +2\sqrt{\Lambda^2 - \alpha^2}, \quad b = +2\sqrt{1 + 2\nu^2 + \alpha^2},$$

$$c=-2,\quad d=2\Lambda^2,\quad h=+2.$$

Если воспользоваться одним из условий полиномиальности, а именно

$$d=-a\left(n+\frac{b+c+2}{2}\right)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \frac{\Lambda^4}{\Lambda^2-\alpha^2}=\left(n+\sqrt{1+2\nu^2+\alpha^2}\right)^2, \tag{28}$$

то можно вывести условие квантования для энергии:

$$E^2=m^2c^4\,\frac{2\alpha^2}{N^2-\sqrt{N^4-4\alpha^2N^2}}. \tag{29}$$

Легко можно найти нерелятивистский предел для этого спектра. Учитывая, что

$$N=n+\sqrt{1+2\nu^2+\alpha^2}=$$
$$=n+\sqrt{1+j(j+1)+\alpha^2}\approx n+j;$$
$$m+\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\approx m+\varepsilon,$$

получаем выражение

$$E^2=m^2c^4\,\frac{2\alpha^2}{N^2-\sqrt{N^4-4\alpha^2N^2}}\approx m^2c^4\left(1-\frac{\alpha^2}{N^2}\right);$$

$$N\approx n+j;$$

отсюда выводим формулу

$$E=m^2c^4\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{N^2}}=mc^2\left(1-\frac{\alpha^2}{2N^2}\right)=mc^2+E',$$

где нерелятивистская добавка определяется выражением

$$E'=-\frac{\alpha^2Mc^2}{2N^2}=-\frac{me^4}{2\hbar^2(j+n)^2}. \tag{30}$$

Из общих соображений понятно, что для частицы со спином 1 следует ожидать три линейно независимых класса решений; в данной статье описаны только два.

Итак, система уравнений для электромагнитного поля в пространстве Лобачевского преобразована в уравнение, совпадающее по форме с одномерным уравнением Шредингера с эффективным потенциалом; на его основе проведен анализ зеркально отражающих свойств среды, моделируемой геометрией Лобачевского (см. также работу [7]). Задача для частицы со спином 1 в кулоновском поле сведена к уравнению Гойна и определенному классу функций Гойна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Heun, K.** Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten [Text] / K. Heun // Math. Ann. – 1889. – Vol. 33. – P. 161–179.

2. Heun's differential equation [Text] / Ed. A. Ronveaux, F. Arscott. – Oxford: Oxford University Press, 1995.

3. **Slavyanov, S.Ju.** Special functions. A unified theory based on singularities [Text] / S.Ju. Slavyanov, W. Lay. – Oxford, 2000. – 154 p.

4. **Ovsiyuk, E.M.** Coulomb problem for a Dirac particle in flat Minkowski space and the Heun functions, extension to curved models [Electronic resource] / E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // arXiv.org e-Print archive. – 2011. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/1109.5452.

5. **Bogush, A.A.** Maxwell equations in complex form of Majorana–Oppenheimer, solutions with cylindric symmetry in Riemann S_3 and Lobachevsky H_3 spaces [Text] / A.A. Bogush, G.G. Krylov, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // Ricerche di matematica. – 2010. – Vol. 59, № 1. – P. 59–96.

6. **Red'kov, V.M.** Spin 1/2 particle in the field of the Dirac string on the background of de Sitter space-time [Electronic resource] / V.M. Red'kov, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko // arXiv.org e-Print archive. – 2011. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/1109.3009.

7. **Ovsiyuk, E.M.** On simulating a medium with special reflecting properties by Lobachevsky geometry (One exactly solvable electromagnetic problem) [Electronic resource] // E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // arXiv.org e-Print archive. – 2011. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/1109.0126.

8. **Отчик, В.С.** Квантовомеханическая задача Кеплера в пространствах постоянной кривизны [Текст] / В.С. Отчик, В.М. Редьков. – Минск, 1986. – 49 с. – (Препринт / ИФ АН БССР; № 298).

9. **Ovsiyuk, E.M.** On solutions of Maxwell equations in the space-time of Schwarzschild black hole [Text] // E.M. Ovsiyuk / Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – in press.

10. **Ovsiyuk, E.M.** Quantum Kepler problem for spin 1/2 particle in spaces on constant curvature. I. Pauli theory [Text] / E.M. Ovsiyuk // NPCS. – 2011. – Vol. 14. – № 1. – P. 14–26.

11. **Kisel, V.** Wave functions of a particle with polarizability in the Coulomb potential [Electronic resource] / V. Kisel, G. Krylov, E. Ovsiyuk, M. Amirfachrian, V. Red'kov // arXiv.org e-Print archive. – 2011. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/1109.3302.

12. **Kisel, V.V.** On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field [Text] / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // NPCS. – 2010. – Vol. 13, No 4. – P. 352–367.

13. **Олевский, М.Н.** Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение допускает полное разделение переменных [Текст] / М.Н. Олевский // Мат. сб. – 1950. – Т. 27. – С. 379–426.

14. **Редьков, В.М.** Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца [Текст] / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 495 с.

15. **Редьков, В.М.** Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера [Текст] / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2011. – 339 с.

УДК 519.6

С.В. Божокин, С.Н. Лыков

НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Многие сигналы, изучаемые в физике, существенно нестационарны. Это означает, что их статистические свойства и спектральные характеристики, вычисленные для достаточно большого интервала времени T, изменяются, если взять любой другой интервал времени T, смещенный на произвольный момент времени относительно первого. Явление нестационарности приводит к тому, что многие традиционные методы исследования сигналов (оконное преобразование Фурье, корреляционный анализ) оказываются малоэффективными. В таких случаях для анализа нестационарных процессов используется теория вейвлетов [1–6].

Термин вейвлет происходит от английского слова wavelet, что в дословном переводе означает «маленькая волна»; иногда этот термин переводится как «всплеск». Возникновение теории вейвлетов считается одним из важнейших достижений в математике за последние десятилетия. Теория вейвлетов стала мощным инструментом прикладных исследований практически во всех естественных науках и многих отраслях техники. В настоящее время вейвлеты широко используются при решении задач анализа и синтеза различных сигналов, для обработки изображений, сжатия больших объемов информации и цифровой фильтрации, распознавания образов, количественного описания турбулентности, решения некоторых дифференциальных уравнений. Вейвлеты применяются в радиофизике, нелинейной динамике, акустике, оптике, физике твердого тела, сейсмологии, динамике жидкостей, биологии и медицине, а также экономике [7–13].

Целью работы является нахождение аналитического выражения непрерывного вейвлет-преобразования для простейшего нестационарного сигнала $z_L(t)$ (зависящего от времени t), который представляет собой произведение огибающей гауссовой формы на осциллирующую функцию. Сложный нестационарный сигнал $Z(t)$ представляется в виде суперпозиции простейших нестационарных сигналов. В качестве материнского используется вейвлет Морле $\psi(x)$, для которого вычисляется протяженность Δ_x по оси x, а также параметр Δ_Ω, определяющий протяженность частотного спектра. Приведена формула для восстановления сигнала $Z(t)$ по известному результату непрерывного вейвлет-преобразования. Даются выражения для локальной плотности $\varepsilon(\nu, t)$ спектра энергии сигнала, зависящей от частоты ν и времени t, а также спектральных интегралов $E_\mu(t)$.

Вейвлет Морле

Интеграл Фурье комплексной функции $\psi(x)$, зависящей от вещественного аргумента x, определяется следующим образом:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\Omega) \exp(-i\Omega x) \frac{d\Omega}{2\pi}. \qquad (1)$$

Фурье-компонента $\hat{\psi}(\Omega)$, характеризующая спектральный состав функции $\psi(x)$, имеет вид

$$\hat{\psi}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp(i\Omega x) dx. \qquad (2)$$

Предположим, что функция $\psi(x)$ достаточно быстро убывает при $x \to \pm\infty$ и, следовательно, имеет конечный квадрат нормы, удовлетворяющий равенству Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\Omega)|^2 \frac{d\Omega}{2\pi}. \qquad (3)$$

Определим центр локализации x_c функции $\psi(x)$ по оси x и центр частотной локализации Ω_c Фурье-компоненты $\hat{\psi}(\Omega)$:

$$x_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx};$$

$$\Omega_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Omega |\hat{\psi}(\Omega)|^2 \frac{d\Omega}{2\pi}}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\Omega)|^2 \frac{d\Omega}{2\pi}}. \qquad (4)$$

Квадраты параметра Δ_x, позволяющего оценить протяженность функции $\psi(x)$ по оси x, а также параметра Δ_Ω, характеризующего протяженность частотного спектра функции $\hat{\psi}(\Omega)$, имеют вид

$$(\Delta_x)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)^2 |\psi(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx};$$

$$(\Delta_\Omega)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\Omega - \Omega_c)^2 |\hat{\psi}(\Omega)|^2 \frac{d\Omega}{2\pi}}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\Omega)|^2 \frac{d\Omega}{2\pi}}. \qquad (5)$$

Величины Δ_x и Δ_Ω, введенные таким образом, удовлетворяют неравенству $\Delta_x \Delta_\Omega \geq 1/2$. Ширина окна, соответствующего функции $\psi(x)$ на оси x, составляет $2\Delta_x$, а ширина окна на шкале частот Ω оценивается величиной $2\Delta_\Omega$.

Теория вейвлетов предписывает выбрать определенную функцию $\psi(x)$ в качестве материнского вейвлета, а затем разложить исследуемый нестационарный сигнал по базисным функциям, полученным из материнского вейвлета путем сжатий, растяжений и сдвигов.

Материнский вейвлет $\psi(x)$ должен быть хорошо локализован вблизи точки $x = 0$, иметь нулевое среднее значение и обладать единичной нормой. Этими свойствами обладает вейвлет Морле:

$$\psi(x) = D \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(\exp(-i\Omega_0 x) - \exp\left(-\frac{\Omega_0^2}{2}\right)\right), \qquad (6)$$

где параметр $\Omega_0 = 2\pi$, а значение нормировочной постоянной D определяется следующей формулой:

$$D = \left[\sqrt{\pi}\left(1 - 2\exp\left(-\frac{3\Omega_0^2}{4}\right) + \exp\left(-\Omega_0^2\right)\right)\right]^{-1/2}. \qquad (7)$$

Из выражения (6) видно, что вейвлет Морле представляет собой комплексную функцию, осциллирующую с частотой Ω_0 и модулированную функцией Гаусса. Фурье-компонента вейвлета Морле имеет вид

$$\hat{\psi}(\Omega) = \sqrt{2\pi}\, D \times \left[\exp\left(-\frac{(\Omega - \Omega_0)^2}{2}\right)\left(1 - \exp(-\Omega_0 \Omega)\right)\right]. \qquad (8)$$

Используя Фурье-компоненту $\hat{\psi}(\Omega)$, введем константу C_ψ:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\Omega)|^2 d\Omega}{|\Omega|}. \qquad (9)$$

В случае вейвлета Морле формулы (4) приводят к следующим значениям усредненной координаты x_c и усредненной частоты Ω_c:

$$x_c = 0;$$

$$\Omega_c = \Omega_0\left(1 - \exp\left(-\frac{3\Omega_0^2}{4}\right)\right) \times \left[1 - 2\exp\left(-\frac{3\Omega_0^2}{4}\right) + \exp\left(-\Omega_0^2\right)\right]^{-1}. \qquad (10)$$

Квадраты протяженности Δ_x вейвлета Морле на оси x и протяженности Δ_Ω частотного спектра имеют вид

$$\Delta_x^2 = \frac{1}{2}\left\{1+\left[\Omega_0^2 \exp\left(-\frac{3\Omega_0^2}{4}\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[1-2\exp\left(-\frac{3\Omega_0^2}{4}\right)+\exp\left(-\Omega_0^2\right)\right]^{-1}\right\}; \quad (11)$$

$$\Delta_\Omega^2 = \frac{1}{2}\left\{1-\left[\Omega_0^2\left(\exp\left(-\frac{3\Omega_0^2}{4}\right)-2\exp\left(-\Omega_0^2\right)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\exp\left(-\frac{7\Omega_0^2}{4}\right)\right)\right]\times \quad (12)$$
$$\left.\times\left[1-2\exp\left(-\frac{3\Omega_0^2}{4}\right)+\exp\left(-\Omega_0^2\right)\right]^{-1}\right\}.$$

При выборе значения $\Omega_0 = 2\pi$ параметры локализации вейвлета Морле принимают значения $\Delta_x \approx 1/\sqrt{2}$, $\Delta_\Omega \approx 1/\sqrt{2}$, что очень близко к наименьшему значению произведения $\Delta_x \Delta_\Omega = 1/2$. Следовательно, вейвлет Морле одинаково хорошо подходит для анализа как временных, так и частотных особенностей исследуемого сигнала.

Непрерывное вейвлет-преобразование

Указанное вейвлет-преобразование $V(\nu,t)$ определено следующим выражением:

$$V(\nu,t) = \nu\int_{-\infty}^{\infty} Z(t')\,\psi^*\left(\nu(t'-t)\right)dt'. \quad (13)$$

Оно отображает исходный сигнал $Z(t)$ на плоскость непрерывно изменяющихся аргументов – частоты ν и времени t. В этом выражении $\psi(x)$ – материнский вейвлет; звездочка означает комплексное сопряжение. Аргумент ν определяет масштаб сжатия или растяжения материнского вейвлета, а аргумент t – положение центра его локализации. Вейвлет играет роль адаптивного окна, ширина которого велика для малых частот ν и мала для больших частот. Основной вклад в интеграл $V(\nu,t)$ дают те составляющие сигнала $Z(t')$, которые в наибольшей степени «похожи» на вейвлет, центрированный в точке $t'=t$ и осциллирующий с частотой ν. В представлении Фурье вейвлетное преобразование $V(\nu,t)$ принимает вид

$$V(\nu,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{Z}(\omega)\,\hat{\psi}^*\left(\frac{\omega}{\nu}\right)\exp(-i\omega t)\frac{d\omega}{2\pi}, \quad (14)$$

где $\hat{Z}(\omega)$ – Фурье-компонента сигнала $Z(t)$, а $\hat{\psi}(\omega)$ – Фурье-компонента вейвлета.

Анализ выражения (14) показывает, что основной вклад в интеграл (14) вносят частоты ω, удовлетворяющие соотношению $\omega \approx \Delta_\Omega \nu$, где Δ_Ω – протяженность частотного спектра материнского вейвлета.

Условие конечности константы C_ψ, определенной соотношением (9), позволяет вывести формулу обращения

$$Z(t) = \frac{2}{C_\psi}\int_0^\infty d\nu \int_{-\infty}^{\infty} dt'\,\mathrm{Re}\left[V(\nu,t')\,\psi\left(\nu(t-t')\right)\right], \quad (15)$$

восстанавливающую сигнал $Z(t)$ по известному вейвлетному преобразованию $V(\nu,t)$ и материнскому вейвлету $\psi(x)$.

Для доказательства соотношения (15) необходимо воспользоваться равенством

$$\frac{2}{C_\psi}\int_0^\infty d\nu\cdot\nu\int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \times$$
$$\times\mathrm{Re}\left\{\psi^*\left[\nu(t'-t_0)\right]\psi\left[\nu(t-t_0)\right]\right\} = \delta(t-t'), \quad (16)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Для вейвлет-преобразования справедливо соотношение, аналогичное формуле Парсеваля в Фурье-анализе:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\,Z^2(t) = \frac{2}{C_\Psi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_0^\infty d\nu\frac{\left|V(\nu,t)\right|^2}{\nu}. \quad (17)$$

Из этой формулы следует, что величина $\varepsilon(\nu,t)$, имеющая вид

$$\varepsilon(\nu,t) = \frac{2}{C_\Psi}\frac{\left|V(\nu,t)\right|^2}{\nu}, \quad (18)$$

характеризует мгновенное распределение энергии сигнала по частотам ν вейвлетного преобразования (локальная плотность спектра энергии сигнала).

Изменение спектральных свойств сигнала во времени можно проанализировать, рассматривая положения максимумов (хребтов) поверхности $|V(\nu,t)|^2$. Изображение таких хреб-

тов называют скелетоном сигнала. Для исследования динамики нарастания и спадания спектральных составляющих нестационарных сигналов используется спектральный интеграл

$$E_{\mu}(t) = \int_{\nu_{\mu-1}}^{\nu_{\mu}} d\nu \cdot \varepsilon(\nu, t), \qquad (19)$$

представляющий собой локальную плотность спектра энергии сигнала, проинтегрированную по интервалу частот $[\nu_{\mu-1}, \nu_{\mu}]$, где величины ν_{μ} ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$) характеризуют границы интервала с номером μ.

С целью построения математической модели нестационарного сигнала $Z(t)$, решение для которой может быть получено аналитически, воспользуемся принципом суперпозиции и представим сигнал в виде суммы N простейших нестационарных сигналов, центрированных в точках $t = t_L$ и характеризующихся системой параметров L:

$$Z(t) = \sum_{L=0}^{N-1} z_L(t - t_L). \qquad (20)$$

Примером простейшего нестационарного сигнала $z_L(t - t_L)$ является выражение

$$z_L(t - t_L) = \frac{b_L}{2\tau_L\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(t - t_L)^2}{4\tau_L^2}\right) \times \cos\left(2\pi f_L(t - t_L) + \alpha_L\right). \qquad (21)$$

Сигнал $z_L(t - t_L)$ представляет собой произведение огибающей гауссовой формы на осциллирующую функцию и описывается системой пяти параметров L, которые можно представить в виде

$$L = (b_L; f_L; t_L; \tau_L; \alpha_L), \qquad (22)$$

где b_L – амплитуда сигнала, f_L, Гц – частота колебаний; t_L, с – центр локализации сигнала во времени; τ_L, с – характерный размер локализации сигнала по времени; α_L, рад – начальная фаза.

На рис. 1 показана зависимость от времени простейшего нестационарного сигнала $z_L(t - t_L)$ с параметрами

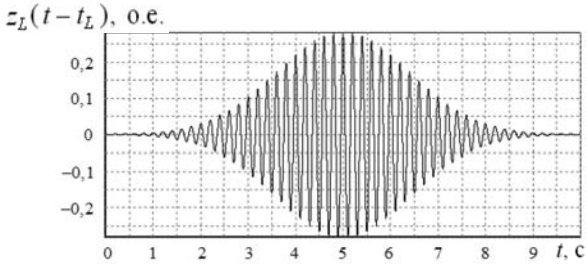


Рис. 1. График простейшего нестационарного сигнала $z_L(t - t_L)$ с параметрами $L = (1; 5; 5; 1; 0)$ в зависимости от времени

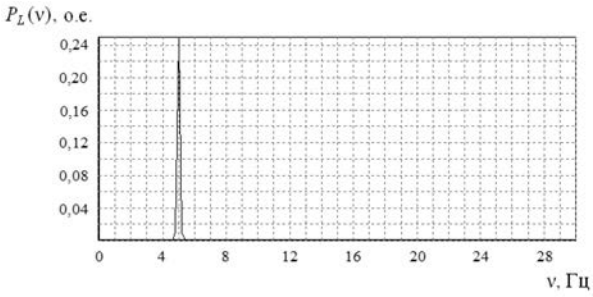


Рис. 2. Частотный спектр мощности простейшего нестационарного сигнала (см. рис. 1)

$$L = (1; 5; 5; 1; 0).$$

Фурье-компонента $\hat{z}_L(\omega)$ простейшего сигнала имеет вид

$$\hat{z}_L(\omega) = \frac{b_L \exp(i\omega t_L)}{2}\left\{\exp\left[-(x_L + F_L)^2 + i\alpha_L\right] + \exp\left[-(x_L - F_L)^2 - i\alpha_L\right]\right\}, \qquad (23)$$

где $x_L = \omega\tau_L$, $F_L = 2\pi f_L \tau_L$.

Зная величину $\hat{z}_L(\omega)$, можно вычислить спектр мощности $P_L(\omega) = |\hat{z}_L(\omega)|^2$ сигнала. В качестве аргумента вместо круговой частоты ω удобно рассматривать частоту $\nu = \omega/(2\pi)$. Спектр мощности $P_L(\nu)$, приведенный на рис. 2 для частот $\nu > 0$, представляет собой гауссов пик с центром при $\nu = f_L$. Характерная полуширина спектра мощности имеет вид $\Delta_{\nu} = 1/(4\pi\tau_L)$. Отметим, что классический спектральный анализ, основанный на преобразовании Фурье, позволяет обнаруживать факт присутствия в сигнале $Z(t)$ различных гармоник, но не дает возможности проследить эволюцию во времени мгновенных спектральных характеристик сигналов.

По сравнению с классическим Фурье-анализом и оконным преобразованием Фурье теория вейвлетов предоставляет более широкие возможности. Непрерывное вейвлет-преобразование (13) позволяет вычислять изменение плотности $\varepsilon(\nu,t)$ спектра энергии сигнала во времени. Тем самым для сигнала $Z(t)$ открывается возможность анализировать динамику возникновения и исчезновения отдельных гармоник, что является эффективным инструментом исследования локальных свойств сигналов даже в случае сильной нестационарности, когда мгновенные частоты быстро изменяются.

Для простейшего нестационарного сигнала $z_L(t-t_L)$ вейвлет-преобразование (13) можно выполнить аналитически; результат мы обозначим посредством $V_L(\nu,t)$. Тогда свойство линейности (аддитивность) вейвлет-преобразования дает возможность получить аналитическое выражение и для сложного сигнала $Z(t)$ (20) – в виде суммы соответствующих функций $V_L(\nu,t)$.

Приведем выражение для функции $\left|V_L(\nu,t)\right|^2$, когда аргумент $\nu \approx f_L$, а параметр $\nu\tau_L$ удовлетворяет соотношению $\nu\tau_L >> 1$:

$$\left|V_L(\nu,t)\right|^2 \approx \frac{D^2 b_L^2}{8\tau_L^2} \times \times \exp\left[-\frac{(t-t_L)^2}{2\tau_L^2} - \frac{4\pi^2(f_L-\nu)^2}{\nu^2}\right] K(\nu), \quad (24)$$

где

$$K(\nu) = \left[1-\exp\left(-\frac{8\pi^2 f_L}{\nu}\right)\right]^2 + +4\cos^2\gamma \cdot \exp\left(-\frac{4\pi^2 f_L}{\nu}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{4\pi^2 f_L}{\nu}\right)\right]^2,$$

$$\gamma = \alpha_L + 2\pi f_L (t-t_L).$$

График функции $\left|V_L(\nu,t)\right|^2$ от времени представляет собой гауссов пик при $t = t_L$, ширина которого совпадает с величиной τ_L. График зависимости той же функции от частоты ν имеет вид асимметричного пика с центром, строго локализованным в точке $\nu = f$. Это обстоятельство очень важно при анализе скелетонов – двумерных изображений экстремальных значений поверхности $\left|V_L(\nu,t)\right|^2$. Поверхность, изображающая зависимость квадрата модуля непрерывного вейвлет-преобразования (24) от времени и частоты, представлена на рис. 3. В дополнение на рис. 4 приведен график отношения величины $\left|V_L(\nu,t_L)\right|^2$ к ее максимальному значению в зависимости от безразмерной частоты ν / f_L. Спектральная ширина на половине максимума этого пика, центрированного в точке $\nu = f_L$, равняется $0,27 f_L$; на рис. 4 эта ширина указана жирной линией.

Отметим, что в публикациях [2, 4, 5, 9] принято несколько иное определение интегрального вейвлет-преобразования $W(\nu,t)$. В этих работах вместо частоты ν используется масштабная переменная вейвлетного преобразования $s = 1/\nu$. Введенная нами функция $V(\nu,t)$ (13) связана с функцией $W(\nu,t)$, применяемой в указанных работах, соотношением

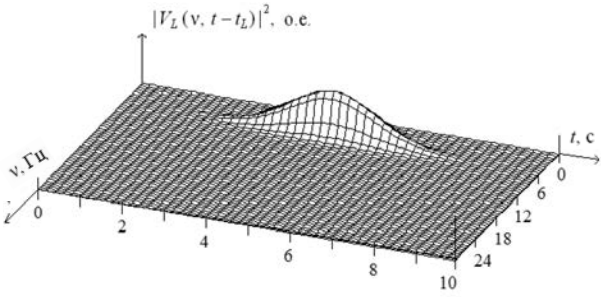


Рис. 3. График квадрата модуля непрерывного вейвлет-преобразования в зависимости от времени и частоты, выполненного для простейшего нестационарного сигнала (см. рис. 1)

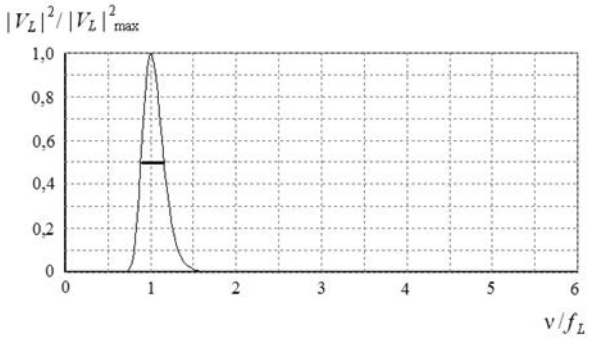


Рис. 4. График отношения величины $\left|V_L(\nu, t_L)\right|^2$ к ее максимальному значению в зависимости от безразмерной частоты для простейшего нестационарного сигнала (см. рис. 1)

$$V(\nu,t)=\sqrt{\nu}\,W(\nu,t).$$

Из-за множителя $\sqrt{\nu}$ максимум функции $W(\nu,t)$ не соответствует условию $\nu = f$ даже для стационарного сигнала в форме гармонического колебания с частотой f, что усложняет интерпретацию графиков $W(\nu,t)$.

Таким образом, в данной статье предложена аналитическая модель нестационарного сигнала $Z(t)$, представляющая собой линейную суперпозицию простейших нестационарных сигналов $z_L(t-t_L)$. Подбирая различные комбинации параметров $L = (b_L; f_L; t_L; \tau_L; \alpha_L)$ и количество слагаемых в суперпозиции, можно конструировать теоретические модели, позволяющие аналитически описывать нестационарные физические процессы.

Непрерывное вейвлет-преобразование $V(\nu,t)$ введено с использованием материнского вейвлета Морле. Для простейшего нестационарного сигнала $z_L(t-t_L)$ получено аналитическое выражение вейвлет-преобразования – функция $V_L(\nu,t)$. Показано, что временная протяженность величины $V_L(\nu,t)$ равна значению параметра τ_L, спектральная ширина составляет приблизительно $0,27f_L$, а центр спектра находится в точке $\nu = f_L$. В общем случае функция $V(\nu,t)$ отражает сложную динамику изменения спектральных свойств нестационарного сигнала, диагностирует локальные частоты и выявляет переходные этапы.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (2009–2013)»

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Добеши, И.** Десять лекций по вейвлетам [Текст]/ И. Добеши. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 462 с.

2. **Чуи, К.** Введение в вейвлеты [Текст]/ К. Чуи. – М.: Мир, 2001. – 416 с.

3. **Витязев, В.В.** Вейвлет-анализ временных рядов [Текст]/ В.В. Витязев. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001. – 58 с.

4. **Короновский, А.А.** Непрерывный вейвлет-анализ и его приложения [Текст]/ А.А. Короновский, А.Е. Храмов. – М.: Физматлит, 2003. – 176 с.

5. **Мала, С.** Вейвлеты в обработке сигналов [Текст]/ С. Малла –М.: Мир, 2005. –671 с.

6. **Божокин, С.В.** Дополнительные главы теоретической физики. Вейвлеты [Текст]/ С.В. Божокин, С.Н. Лыков. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2007. – 252 с.

7. **Божокин, С.В.** Вейвлет-анализ динамики усвоения и забывания ритмов фотостимуляции для нестационарной электроэнцефалограммы [Текст]/ С.В. Божокин // ЖТФ. – 2010. – Т. 80, – № 9. – С. 16–24.

8. **Божокин, С.В.** Вейвлет-анализ переходных процессов электроэнцефалограммы при фотостимуляции [Текст]/ С.В. Божокин, Н.Б. Суворов. // Биомедицинская радиоэлектроника. – 2008. – № 3. – С. 21–25.

9. **Короновский, А.А.** Метод исследования синхронизации автоколебаний по универиантным данным с использованием непрерывного вейвлетного анализа [Текст]/ А.А. Короновский, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров, А.Е. Храмов // ЖТФ. – 2007. – Т. 77. – № 9. – С. 6–17.

10. **Addison, P.S.** Wavelet transforms and the ECG: a review [Текст]/ P.S. Addison // Physiol. Meas. – 2005. – Vol. 26. – P. R155–R159.

11. **Shyu, H.C.** Construction of a Morlet wavelet power spectrum [Текст]/ H.S. Shyu, Y.S. Sun // Multidimensional Systems and Signal Processing. – 2002. – Vol. 13. – P. 101–111.

12. **Sinha, S.** Spectral decomposition of seismic data with continuous-wavelet transform [Текст]/ S. Sinha, P.J. Partha, P.D. Anno, J.P. Castanga // Geophysics. – 2005. – Vol. 70. – No 6. – P. 19–25.

13. **Bussow, R.** An algorithm for the continuous Morlet wavelet transform [Текст]/R. Bussow // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2007. – Vol. 21. – No 8. – P. 2970–2979.

УДК 539.194

А.А. Баранов, С.В. Ермак, В.В. Семенов

ПОДАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИОННОГО СВЕТОВОГО СДВИГА ЧАСТОТЫ РАДИООПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В ЩЕЛОЧНЫХ АТОМАХ В УСЛОВИЯХ ЛАЗЕРНОЙ НАКАЧКИ

В приложениях радиооптического резонанса негативную роль играет так называемый световой сдвиг частоты, связанный со Штарк-эффектом смещения энергетических подуровней основного состояния атомов под действием электромагнитного поля накачки и ограничивающий прецизионные параметры целого ряда квантовых устройств, таких как квантовые магнитометры и образцовые меры частоты на парах щелочных металлов [1]. Как показано в работе [2], при использовании в таких устройствах ламповых источников накачки имеет место заметная зависимость светового сдвига частоты от ориентации внешнего магнитного поля по отношению к направлению света накачки. Подобная зависимость однозначно определяется тензорной компонентой светового сдвига, связанной с эффектом выстраивания основного состояния и зависящей от степени разрешения энергоструктуры возбужденного состояния атомов [3].

При переходе к лазерным источникам с целью улучшения габаритных параметров квантовых устройств, в работе [4] была решена задача уменьшения светового сдвига, где применена методика частотной модуляции линии излучения лазера. Указанная методика позволяет резко уменьшить зависимость светового сдвига от расстройки частоты лазерного источника относительно линии атомного перехода. Подобная методика была экспериментально апробирована на изотопе Rb^{87}, и выполнен расчет светового сдвига частоты (0–0)-перехода в зависимости от расстройки частоты лазера относительно D_2-линии поглощения атомного перехода. При этом учитывалась только скалярная компонента светового сдвига, которая в случае накачки D_2-линией значительно превышает вклад его тензорной составляющей. В настоящей работе представлены результаты расчета светового сдвига частоты радиооптического резонанса в различных щелочных атомах с учетом тензорной компоненты и показано, что использование модуляционной методики в условиях лазерной накачки позволяет не только уменьшить световой сдвиг, но и дает возможность значительно ослабить ориентационный сдвиг резонансной частоты.

В качестве объекта исследований были выбраны изотопы рубидия, калия и цезия, наиболее часто используемые в практике радиооптического резонанса. Расчеты проводились аналогично тому, как это выполнено в работе [3]. При этом контур спектра лазерной накачки аппроксимировался доплеровскими контурами с весовыми множителями, пропорциональными квадрату функции Бесселя частотно-модулированного спектрального источника.

Для указанных щелочных атомов выполнялся расчет вариантов лазерной накачки линиями D_1 и D_2 с подуровней сверхтонкой структуры основного состояния атомов с полными моментами F и $F+1$ для различных частот и индексов модуляции. На рис. 1 представлены зависимости светового и ориентационного сдвигов частоты от частотной расстройки лазера при сверхтонкой оптической накачке D_2-линией из основного состояния щелочных атомов с полными моментами F и $F+1$ немодулированным источником накачки. Эффект подавления светового и ориентационного сдвигов иллюстрирует рис. 2, где представлены соответствующие зависимости для атомов Rb^{87} в условиях лазерной накачки линиями D_1 и D_2 с подуровней сверхтонкой структуры основного состояния атомов с полным моментом $F = 2$. Примеры ориентационного сдвига для изотопа рубидия Rb^{85} при различных индексах модуляции частоты лазерного источника для линий накачки D_1 и D_2 представлены на рис. 3.

В таблице представлены сводные данные крутизны зависимостей ориентационного и

светового сдвигов для щелочных атомов при расстройках частоты накачки лазера, соответствующих нулевым значениям ориентационного и светового сдвигов.

Анализ представленных результатов позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых, при равных интегральных интенсивностях лазерной оптической накачки щелочных атомов D_2-линией с подуровня сверхтонкой структуры с полным моментом F основного состояния атома абсолютные значения светового сдвига и крутизна его изменения в зависимости от расстройки частоты лазера растут по мере увеличения ядерного спина щелочного изотопа. При этом ориентационная поправка частоты зависит от степени разрешения энергоструктуры возбужденного состояния: для атомов цезия (с расщеплением возбужденного состояния 600 МГц) эта поправка максимальна, для изотопов Rb^{87} и K^{39}, где расщепления возбужденного состояния соответственно равны 213 и 72 МГц [5], ориентационная поправка на порядок меньше. Несмотря на относительно невысокие рабочие частоты магнитно-независимых переходов на этих изотопах (462 МГц для K^{39} и 3036 МГц для Rb^{87} [5]) фактор сравнитель-

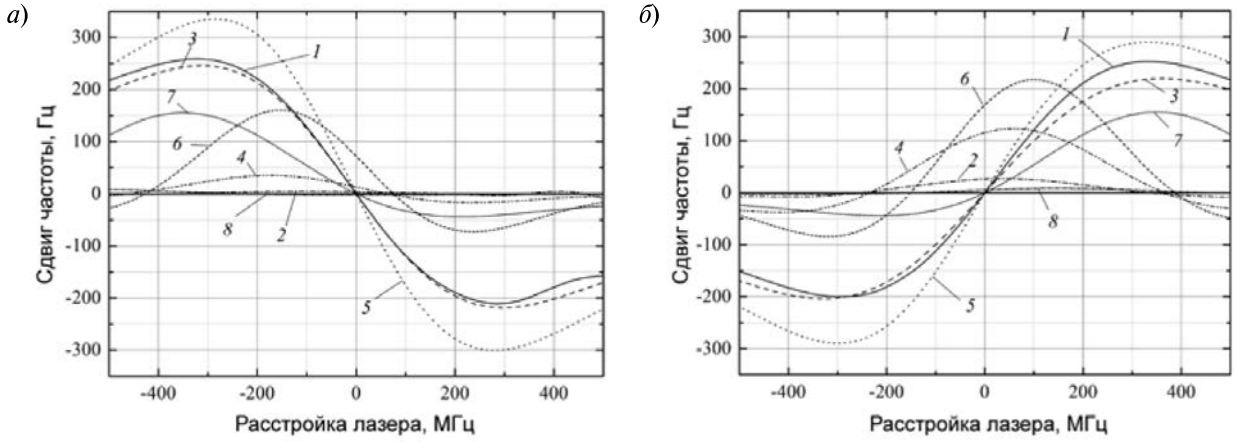


Рис. 1. Расчетные зависимости светового (*1*, *3*, *5*, *7*) и ориентационного (*2*, *4*, *6*, *8*) сдвигов частоты радиооптического СВЧ резонанса щелочных атомов в функции частотной расстройки лазера при сверхтонкой оптической накачке D_2-линией из основного состояния щелочных атомов с полными моментами F (*а*) и $F+1$ (*б*)
Резонансы атомов Rb^{85} (*1*, *2*), Rb^{87} (*3*, *4*), Cs^{133} (*5*, *6*), K^{39} (*7*, *8*)

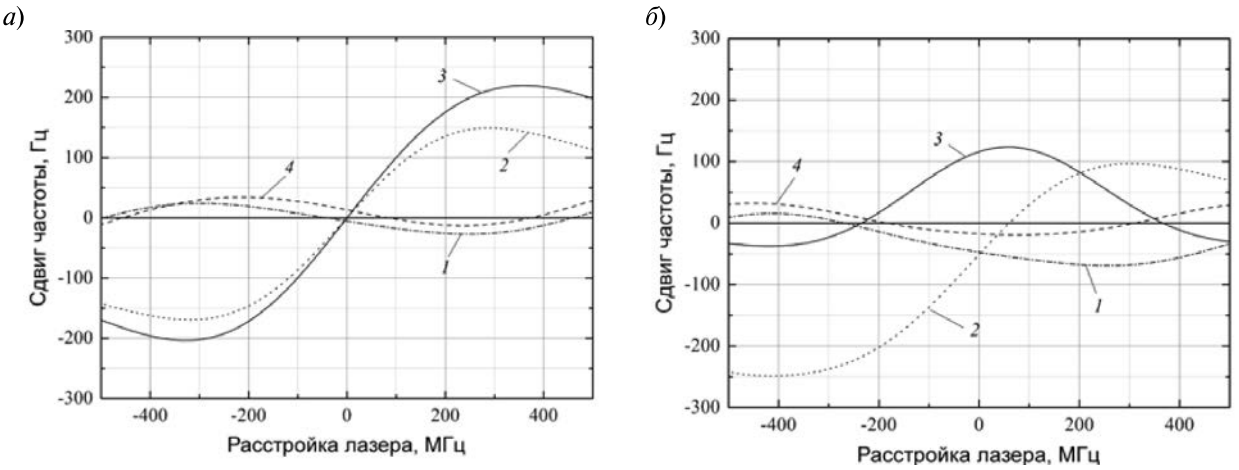


Рис. 2. Зависимости светового (*а*) и ориентационного (*б*) сдвигов частоты радиооптического СВЧ резонанса изотопа Rb^{87} в условиях лазерной накачки линиями D_1 (*1*, *2*) и D_2 (*3*, *4*) из основного состояния атомов с полным моментом $F = 2$; индексы модуляции $m = 0$ (*2*, *3*) и $m = 2$ (*1*, *4*)

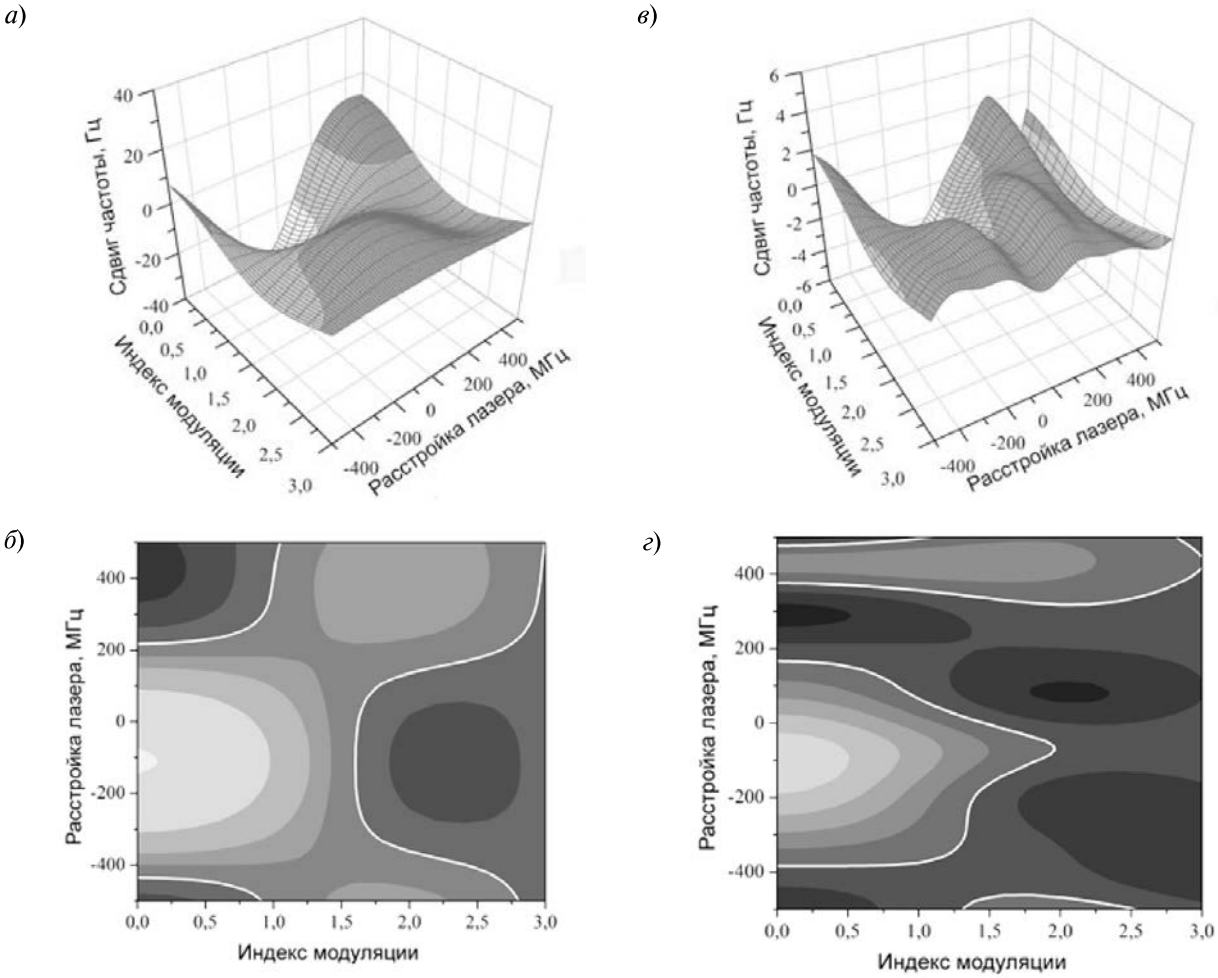


Рис. 3. Зависимости ориентационного сдвига (по тоновым шкалам) для атомов Rb^{85} от частотной расстройки лазера и индекса модуляции при лазерной накачке линиями D_1 (*а*, *б*) и D_2 (*в*, *г*) из основного состояния атомов с полным моментом $F = 2$. Представлены 3D- (*а*, *в*) и 2D- (*б*, *г*) изображения.
Белый контур (*б*, *г*) – нулевой ориентационный сдвиг

Значения крутизны кривых светового и ориентационного сдвигов в области их нулевых значений для четырех изотопов

Режим накачки (линия дублета)	Сдвиг	Полный момент основного состояния	Значение крутизны кривой сдвига для изотопа							
			Cs^{133}		Rb^{87}		Rb^{85}		K^{39}	
			$m = 0$	$m = 2$	$m = 0$	$m = 2$	$m = 0$	$m = 2$	$m = 0$	$m = 2$
D_1	С	F	–0,73	–0,25	–0,34	–0,13	–0,39	–0,1	–0,22	0,05
		F+1	1,27	–0,18	0,86	–0,13	0,43	0,1	0,22	–0,05
	О	F	–0,75	–	0,26	–0,06	0,12	–0,05	0,03	0,01
		F+1	1,25	–	0,77	–0,17	0,24	–0,09	–0,04	–
D_2	С	F	–1,83	0,25	–1,24	–0,25	–1,25	–0,33	–0,44	0,17
		F+1	1,51	–0,23	1	0,24	1,18	0,3	0,44	–0,18
	О	F	–0,82	0,16	–0,18	0,04	–0,01	0,02	–0,02	0,01
		F+1	0,88	–0,24	0,39	–0,15	0,09	–0,03	0,03	–0,01

Примечание. Прочерк означает, что нулевой сдвиг частоты не достигается.
Обозначения: С, О – световой и ориентационный сдвиги, m – индекс модуляции

но малой ориентационной поправки к частоте парощелочного квантового дискриминатора делает такие устройства конкурентно способными в условиях их жесткой эксплуатации на движущихся носителях.

Сформулированное утверждение остается справедливым и в случае лазерной оптической накачки щелочных атомов D_2-линией с подуровня сверхтонкой структуры с полным моментом атома $F + 1$: изменяется лишь знак крутизны соответствующих зависимостей и (незначительно) абсолютные величины светового и ориентационного сдвигов.

Во-вторых, при переходе к лазерной оптической накачке линией D_1 резко возрастает роль тензорной компоненты светового сдвига; при этом ориентационная поправка к частоте для всех рассматриваемых щелочных атомов оказывается примерно на порядок большей по сравнению с вариантом лазерной накачки линией D_2.

В-третьих, введение модуляции частоты лазера накачки вследствие модификации его спектра позволяет значительно уменьшить как величину, так и крутизну зависимостей светового и ориентационного сдвигов в функции расстройки частоты лазера. При одинаковых индексах модуляции эффект ослабления светового и ориентационного сдвигов проявляется в различной степени в зависимости от величины ядерного спина щелочного атома, значения его полного момента в основном состоянии и выбора спектральной линии накачки. Подбором соответствующего индекса и частоты модуляции можно реализовать совпадение частотной расстройки лазера, при которой одновременно и световой, и ориентационный сдвиги частоты достигают нулевого значения.

Анализ зависимостей светового сдвига показывает, что вариация ширины спектра излучения лазера (в пределах 1 – 100 МГц), равно как и частоты модуляции его спектра (в пределах 100 – 500 МГц) не приводит к качественным изменениям полученных результатов. Это позволяет рассчитывать на получение положительного эффекта подавления светового и ориентационного сдвигов частоты для широкого ассортимента лазерных источников накачки, используемых в технике квантовых парощелочных дискриминаторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Риле, Ф.** Стандарты частоты. Принципы и приложения [Текст]: Пер. с англ./ Ф. Риле. – М.: Физматлит, 2009. – 512 с.

2. **Баранов, А.А.** Ориентационная зависимость светового сдвига частоты радиооптического СВЧ резонанса в парах рубидия [Текст] / А.А. Баранов, С.В. Ермак, В.В. Семенов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2010. – № 2 (104). – С. 95 – 98.

3. **Семенов, В.В.** О вкладе тензорной компоненты в световой сдвиг частоты радиооптического СВЧ резонанса в парах рубидия [Текст] / В.В. Семенов // Известия вузов. Физика. – 1999. – № 2. – С. 86 – 90.

4. **Affolderbach, C.** Light-shift suppression in laser optically pumped vapor-cell atomic frequency standards [Text] / C. Affolderbach, C. Andreeva, S. Cartaleva, [et al.] // Appl. Phys. B. – 2005. – Vol. 8. – № 7. – P. 1 – 8.

5. **Радциг, А.А.** Параметры атомов и атомных ионов [Текст]: Справочник/ А.А. Радциг, Б.М. Смирнов. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 344 с.

УДК 539.194

А.А. Баранов, С.В. Ермак, Р.В. Смолин, В.В. Семенов

СВЕТОВЫЕ СДВИГИ ЧАСТОТЫ РАДИООПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В ПАРАХ РУБИДИЯ ПРИ СЕЛЕКТИВНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ НАКАЧКЕ

В традиционных схемах пассивных квантовых стандартов частоты на парах изотопа Rb^{87} используется методика селективной оптической накачки путем пропускания резонансного света спектральной лампы через ячейку-фильтр, содержащий изотоп Rb^{85} [1]. В таких схемах удается достигнуть относительно высокой степени поляризации атомов рабочего вещества, необходимой для детектирования надежного сигнала радиооптического резонанса на магнитонезависимом $(0-0)$-переходе между подуровнями основного состояния. Альтернативные варианты селективной оптической накачки в парах рубидия связаны с использованием полупроводниковых лазеров, внедрение которых в практику радиооптического резонанса открывает новые возможности при проектировании прецизионных квантовых устройств следующего поколения в области образцовых мер частоты и квантовой магнитометрии [2]. Основная проблема подобных устройств заключается в наличии измерительной погрешности, обусловленной так называемым световым сдвигом частоты, который вызван штарковским смещением энергетических подуровней атомов рабочего вещества под действием поля накачки [3]. При использовании неполяризованного излучения накачки световой сдвиг содержит две составляющие:

скалярный сдвиг $\Delta\nu_0$, одинаковый для всех магнитных подуровней сверхтонкой структуры F либо $F^* = F + 1$;

тензорный сдвиг $\Delta\nu_T$, связанный с эффектом выстраивания атомов основного состояния и зависящий от магнитного квантового числа m_F.

Скалярная компонента светового сдвига не зависит от ориентации вектора магнитного поля (определяемого углом θ) относительно направления света накачки, в то время как для тензорной компоненты подобная зависимость имеет место; это налагает жесткие требования на фиксацию угла θ, особенно если значения $\Delta\nu_T$ и $\Delta\nu_0$ соизмеримы по величине.

Подобная ситуация характерна для варианта оптической накачки паров рубидия спектральной компонентой D_1-линии головного дублета, где возбужденное состояние для изотопов Rb^{87} хорошо разрешено и обеспечивает ведущую роль тензорной компоненты в интегральном световом сдвиге частоты радиооптического резонанса и, как следствие, – ориентационную зависимость частоты наблюдаемого резонанса [4]. Так например, в условиях оптической накачки паров Rb^{87} естественной смесью линий накачки D_1 и D_2 головного дублета вариация угла θ всего лишь в один градус дает такое же относительное смещение резонансной частоты (10^{-12}), что и 30 %-е изменение величины рабочего магнитного поля напряженностью 0,8 А/м.

Разрешение энергоструктуры возбужденного состояния в парах Rb^{85} значительно меньше, чем в парах Rb^{87}, что позволяет предположить более слабую ориентационную зависимость резонансной частоты по сравнению с традиционной схемой, где рабочим веществом выступают пары Rb^{87}.

В настоящей работе анализируется альтернативный традиционной схеме вариант селективной оптической накачки паров рубидия, где в качестве рабочего вещества используются пары Rb^{85}, а в ячейке-фильтре помещен изотоп Rb^{87}. При этом проводится сопоставление расчетных данных светового сдвига частоты для вариантов оптической накачки ламповым и лазерным источниками.

Световой сдвиг определялся через интеграл от произведения спектральных компонент $\Delta\nu_0$ и $\Delta\nu_T$ на форм-фактор экспериментального контура линии накачки лампового источника. На рис. 1 представлены спектральные зависимости $\Delta\nu_0$ и $\Delta\nu_T$ для D_1- и D_2-линий поглощения паров Rb^{87} и Rb^{85} на магнитонезависимом $(0-0)$-пере-

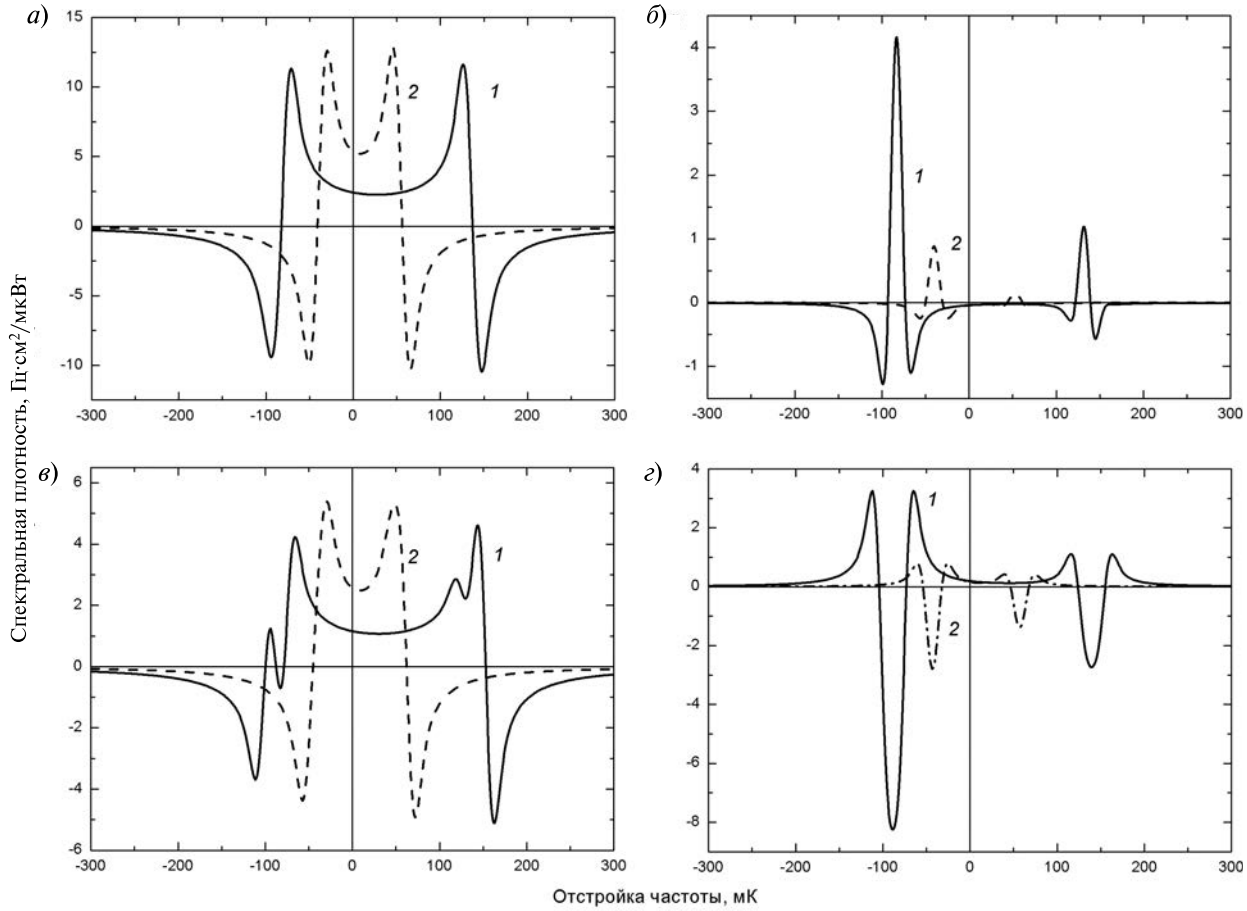


Рис. 1. Функции спектрального отклика светового сдвига изотопов Rb^{87}(*1*) и Rb^{85}(*2*): *а*, *б* – скалярная и тензорная D_2; *в*, *г* – скалярная и тензорная D_1

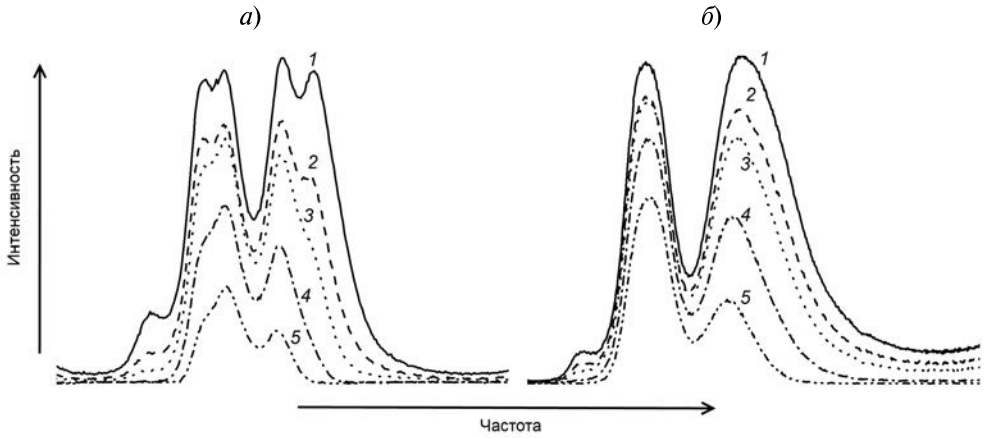


Рис. 2. Экспериментальные профили сверхтонких компонент линий D_1(*а*) и D_2(*б*) излучения спектрального источника.
Лампа с изотопом Rb^{85}; ячейка-фильтр с изотопом Rb^{87} при различных температурах, °С: 30 (*1*), 60 (*2*), 70 (*3*), 80 (*4*), 90(*5*)

ходе, выполненные в соответствии с методикой расчета в работе [5].

Расчеты интегрального светового и ориентационного сдвигов частоты при селективной оптической накачке паров Rb^{85} резонансным светом спектральной лампы проводились с учетом экспериментальных данных относительного сдвига и уширения линий накачки изотопов рубидия, представленных в обзоре [6]. При этом предполагалось равенство коэффициентов фильтрации спектральных компонент головного дублета при замене в спектральной лампе, камере поглощения и в ячейке-фильтре одного изотопа рубидия на другой. Экспериментальная запись спектра лампового источника осуществлялась по интерференционному изображению света спектральной лампы, получаемому с помощью монохроматора МДР-2 и интерферометра Фабри – Перо после детектирования светового излучения накачки ПЗС-линейкой TCD 1304AP. На рис. 2 представлены примеры экспериментальных профилей спектральных линий компонент D_1 и D_2 лампового источника (буферный газ аргон при давлении 1,50 Торр и пары изотопа Rb^{85} при температуре 107 °С) на выходе ячейки-фильтра (буферный газ неон при давлении 175 Торр, пары изотопа Rb^{87}). Спектральный профиль накачки лазерного источника аппроксимировался доплеровским контуром с шириной на половине высоты 100 МГц при интегральной интенсивности 100 мкВт/см^2.

На рис. 3 представлены расчетные зависимости (в функции от температуры ячейки-фильтра) интегральных светового и ориентационного сдвигов частоты радиооптического резонанса на магнитонезависимом (0 – 0)-переходе в изотопах рубидия. Кривые *2* и *4* соответствуют традиционной схеме селективной оптической накачки атомов Rb^{87} с изотопическим фильтром на парах Rb^{85}; *1* и *3* – селективной оптической накачке атомов Rb^{85} с использованием ячейки-фильтра на изотопе Rb^{87}. В обоих случаях расчеты производились для естественного спектрального состава света накачки лампового источника, в котором отношение интенсивностей D_1- и D_2-линий составляло 1,0 : 1,5 для Rb^{87} и 1,0 : 1,0 для Rb^{85}.

На рис. 4 представлены зависимости (в функции расстройки частоты лазера относительно частоты атомного оптического перехода)

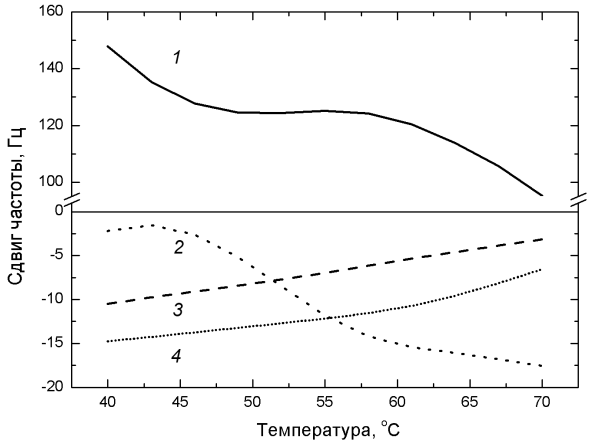


Рис. 3. Зависимости светового (*1*, *2*) и ориентационного (*3*, *4*) сдвигов частоты радиооптического СВЧ резонанса в изотопах рубидия Rb^{85}(*1*, *3*) и Rb^{87}(*2*, *4*) от температуры ячейки-фильтра при ламповой оптической накачке

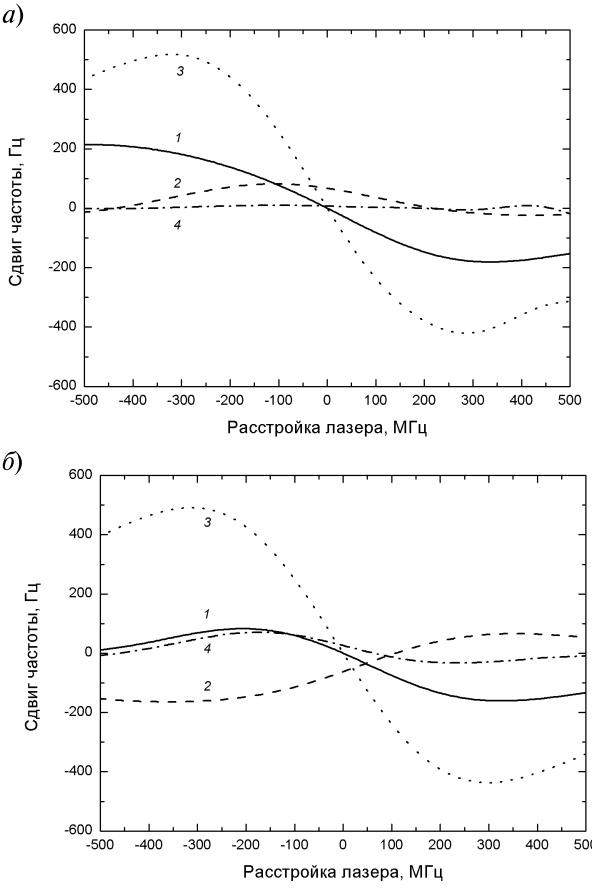


Рис. 4. Зависимости светового(*1*, *3*) и ориентационного (*2*, *4*) сдвигов частоты радиооптического СВЧ резонанса от расстройки частоты лазера для изотопов Rb^{85}(*а*) и Rb^{87} (*б*)

ориентационного и светового сдвигов в изотопах рубидия при лазерной оптической накачке D_2- и D_1-линиями для атомных переходов из основного состояния с полным моментом атома F. Ориентационные сдвиги частоты, представленные на рис. 3 и 4, определялись через разность интегральных световых сдвигов, соответствующих значениям угла $\theta = 0°$ и $\theta = 90°$. При этом интегральная интенсивность света и при лазерной, и при ламповой накачках составляла одну и ту же величину – 100 мкВт/см^2.

Представленные на рис. 3, 4 зависимости позволяют сделать следующие выводы.

Во-первых, при ламповой оптической накачке паров рубидия замена рабочего вещества – одного изотопа на другой, не приводит к качественному изменению зависимостей ориентационного и светового сдвигов во всем диапазоне изменения температуры изотопического фильтра. При этом световые сдвиги в изотопах рубидия имеют противоположные знаки: в Rb^{85} этот знак положителен, а величина светового сдвига примерно на порядок больше, чем это наблюдается в Rb^{87}, где знак светового сдвига отрицателен. Ориентационные поправки к частоте радиооптического резонанса в обоих изотопах рубидия сравнимы по величине и для выбранной интенсивности лампового источника накачки имеют значения на уровне 10 Гц. Таким образом, в условиях ламповой оптической накачки, когда существует линейная связь светового сдвига с интенсивностью источника, даже многократное ослабление мощности накачки не позволяет избежать существенных ориентационных погрешностей квантовых дискриминаторов при изменении их положения относительно направления рабочего магнитного поля.

Во-вторых, замена лампового спектрального источника лазерным качественно изменяет картину относительного поведения световых и ориентационных сдвигов частоты для изотопов рубидия. В рассматриваемом случае лазерной селективной оптической накачки как D_1-, так и D_2-линией удается реализовать нулевые ориентационный и световой сдвиги частоты при соответствующих расстройках частоты источника накачки. Принципиальным моментом здесь является несовпадение величин расстройки частоты лазера, при которых достигаются нулевые значения светового и ориентационного сдвигов. Этот вывод остается справедливым для обеих линий накачки – как D_1, так и D_2 вне зависимости от того, с какого из сверхтонких подуровней основного состояния F или $F^* = F + 1$ осуществляется накачка (отличие лишь в знаках крутизны соответствующих дисперсионных зависимостей).

Нулевой световой сдвиг частоты в изотопе Rb^{85} соответствует ориентационной поправке к частоте (см. рис. 4, *б*) на уровне 1 Гц, то есть на порядок меньшей, чем это имеет место в случае ламповой оптической накачки естественной смесью D_1- и D_2-линий головного дублета. В атомах же Rb^{87} ориентационная поправка по абсолютной величине существенно выше, чем это наблюдается в Rb^{85}, что позволяет считать целесообразным вариант использования этого изотопа в квантовых дискриминаторах частоты с лазерной оптической накачкой. При этом можно ожидать реализацию лучших метрологических характеристик вторичных стандартов частоты в жестких условиях их эксплуатации по температуре на движущихся и вращающихся носителях.

В-третьих, сравнение светового сдвига в изотопах рубидия для D_1- и D_2-линий лазерной накачки показывает, что ориентационная погрешность для линии D_2 в изотопе Rb^{85} на порядок меньше, чем в атомах Rb^{87}, и значительно меньше по сравнению с ориентационной погрешностью обоих изотопов при оптической накачке линией D_1. Этот результат имеет определенное значение при технической реализации эффекта когерентного пленения населенностей [7], где соображения усиления контраста резонанса отдают предпочтение лазерной накачке паров рубидия на оптических переходах D_1-линии, что в свою очередь неизбежно должно приводить к проблемам ориентационной погрешности устройства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пихтелев, А.И.** Стандарты частоты и времени на основе квантовых генераторов и дискриминаторов [Текст] /А.И. Пихтелев, А.А. Ульянов, Б.П. Фатеев [и др.] – М.: Сов. Радио, 1978. – 304 с.

2. **Риле, Ф.** Стандарты частоты. Принципы и приложения [Текст] / Ф. Риле. Пер. Н.Н. Колачевского. – М.: Физматлит, 2009. – С. 512 .

3. **Happer, W.** Optical pumping [Текст] / W. Happer //

Review of Modern Phys. – 1972. – Vol. 44. – № 2. – P. 170–249.

4. **Баранов, А.А.** Ориентационная зависимость светового сдвига частоты радиооптического СВЧ резонанса в парах рубидия [Текст] / А.А. Баранов, С.В. Ермак, В.В. Семенов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2010. – № 2(104). – С. 95–98.

5. **Семенов, В.В.** Световые сдвиги частоты многофотонного радиооптического СВЧ резонанса в парах щелочных атомов [Текст] / В.В. Семенов // Журнал прикладной спектроскопии. – 1998. – Вып. 65. – № 6. – С. 832–838.

6. **Алексеев, Э.И.** Квантовые меры частоты [Текст] / Э.И. Алексеев, Е.Н. Базаров, Г.А. Герасимов, В.Н. Губин // Обзор работ Ин-та радиоэлектроники АН СССР. – 1979. – № 5. – С. 261.

7. **Stahler, M.** Coherent population trapping resonances in thermal ^{85}Rb vapors: D_1 versus D_2 line excitation [Текст] / M. Stahler, R. Wynands, S. Knappe [et al.] // Opt. Lett. – 2002. – Vol. 27. – P. 1472–1474.

УДК 534.6: 534.232

А.В. Шацкий, Л.А. Шацкая

ДИФРАКЦИОННОЕ ЗАТУХАНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ЛУЧА, СОЗДАВАЕМОГО ТОРЦОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

Волновые фронты в ультразвуковом луче, возбуждаемом источником конечного размера, никогда не представляют собой идеальные плоские волны. Фронты волн всегда имеют сложную искривленную поверхность, форма которой непостоянна вдоль луча, и, как правило, эти фронты составляют небольшой угол с направлением нормали к поверхности излучения. На приемнике результирующий сигнал усредняется, и при перемещении его вдоль луча амплитуда полученного сигнала изменяется сложным образом, указывая на то, что существует дифракционное затухание сигнала в ультразвуковом луче, вызванное увеличением поверхности поперечного сечения луча и, следовательно, уменьшением доли звуковой энергии, попадающей на приемник. Непостоянство формы фронта волны вдоль ультразвукового луча приводит к осцилляциям дифракционного затухания, а также к эффекту завышения скорости ультразвуковых волн [1]. Поэтому при экспериментальных исследованиях коэффициента поглощения и скорости ультразвука методами бегущих волн необходимо учитывать влияние дифракционных эффектов [1 – 3]. В данной работе проводится расчет дифракционного затухания ультразвукового луча в системе «поршневой излучатель – цилиндрический волновод – исследуемая среда».

Дифракционное поле поршневого излучателя

Излучение ультразвука в среду в подавляющем большинстве случаев происходит с помощью плоской пьезопластины, и простейшей моделью такого возбудителя является поршневой излучатель, поверхность которого имеет одинаковую амплитуду и фазу колебательной скорости V_0. Задача нахождения ультразвукового поля сводится к краевой, если возбудитель колебаний помещают в бесконечно жесткий экран, причем возбуждаемая поверхность и поверхность излучателя находятся в одной плоскости. Рассмотрим поршневой излучатель, имеющий радиус a и координату $z = 0$, закрепленный в бесконечно жестком экране. Пусть на границе $z = 0$ задано ультразвуковое смещение:

$$u = u_0 \text{ при } 0 \le r \le a;$$

$$u = 0 \text{ при } a < r < \infty. \qquad (1)$$

Решение волнового уравнения в цилиндрической системе координат имеет вид

$$u(r,z)=\int_0^{\infty}\exp(-\beta z)J_0(\alpha r)f(\alpha)\alpha d\alpha\,, \qquad (2)$$

где $\beta^2=\alpha^2-k^2$ ($k=\omega/c$ – волновое число, c – скорость звука); u – ультразвуковое смещение; α – независимая переменная; J_0 – функция Бесселя нулевого порядка; $f(\alpha)$ – некоторая функция, определяющая радиальное распределение ультразвукового смещения.

Используя интегральное преобразование Ханкеля и граничные условия (1), получим выражение, из которого находится явный вид функции $f(\alpha)$:

$$f(\alpha)=u_0\int_0^{a}rJ_0(\alpha r)dr=\frac{u_0 a}{\alpha}J_1(\alpha a)\,,$$

где J_1 – функция Бесселя 1-го порядка.

Подставляя явный вид функции $f(\alpha)$ в решение (2), получим выражение, описывающее дифракционное поле поршневого излучателя:

$$u(r,z)=u_0 a\int_0^{\infty}\exp(-\beta z)J_0(\alpha r)J_1(\alpha a)d\alpha\,. \qquad (3)$$

В качестве устройства, принимающего ультразвуковой сигнал, рассмотрим поршневой приемник, имеющий одинаковый радиус с излучателем и соосный с ним. Амплитуда ультразвукового смещения, снимаемого с приемника, будет определяться следующим выражением:

$$U(z)=2\pi\int_0^{a}u(r,z)rdr\,. \qquad (4)$$

Подставляя выражение (3) в (4), получим зависимость амплитуды ультразвукового смещения на приемнике от расстояния z:

$$U(z)=u_0 2\pi a^2\int_0^{\infty}\exp(-\beta z)J_1^2(\alpha a)\alpha^{-1}d\alpha\,. \qquad (5)$$

На рис. 1 представлена зависимость дифракционного затухания, определяемого по формуле

$$A(S)=20\lg\left(|U(0)|/|U(S)|\right),$$

от обобщенного расстояния $S=z\lambda/a^2$ при $ka=100$, где λ – длина волны ультразвука;

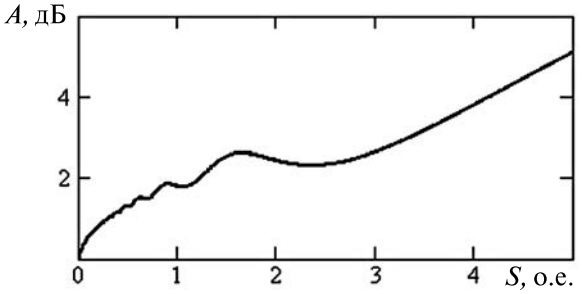


Рис. 1. Зависимость дифракционного затухания поля поршневого излучателя от обобщенного расстояния

$U(S)$ – амплитуда ультразвукового смещения, определяемая выражением (5). Осцилляции дифракционного затухания при $S<3$ определяются числом зон Френеля и свидетельствуют о том, что форма фронта волны вдоль луча не является постоянной. При $S>3$ фронт волны становится плоским и дифракционное затухание монотонно возрастает с увеличением расстояния от излучателя до приемника.

Дифракционное поле, создаваемое торцом цилиндрического акустического волновода

При измерении коэффициента поглощения ультразвука в жидкости импульсным методом в качестве излучателей используются твердотельные линии задержки сигнала – цилиндрические акустические волноводы, обеспечивающие изоляцию пьезопластин от исследуемой жидкости. В такой компоновке акустический тракт представляется в виде «пьезопластина – линия задержки – исследуемая среда». В данной работе воспользуемся следующей моделью акустического тракта – «поршневой излучатель – акустический волновод – исследуемая среда».

Рассмотрим поршневой излучатель радиуса a_1, прикрепленный к одному из торцов акустического волновода, имеющего радиус a, причем $a\geq a_1$. Другой конец волновода соединяется с исследуемой жидкостью, которая заполняет бесконечное полупространство. В цилиндрической системе координат r, φ, z координаты поршневого излучателя имеют вид $0\leq r\leq a_1$ и $z=0$; координаты линии задержки – $0\leq r\leq a$ и $0\leq z\leq L$; координаты исследуемой жидкости – $0\leq r<\infty$ и $L\leq z<\infty$. Геометрия задачи представлена на рис. 2.

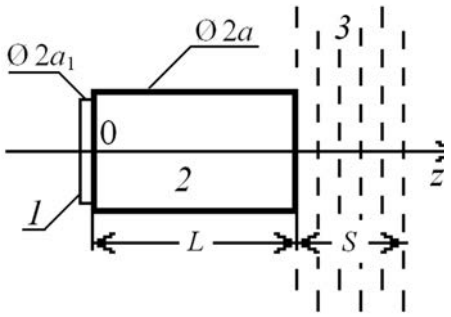


Рис. 2. Геометрическое представление задачи:
1 – поршневой излучатель, *2* – акустический волновод, *3* – исследуемая среда

Решение волнового уравнения в волноводе будем искать в виде

$$u(r,z) \sim J_0(\mu r)\exp(-i\gamma z),$$

где u – ультразвуковое смещение, $\gamma^2 = k^2 - \mu^2$.

Будем считать, что цилиндрические поверхности волновода граничат с вакуумом, тогда упругое напряжение T на границе $r = a$ в линии задержки будет равно нулю, или $\partial u(r,z)/\partial r = 0$. С учетом данного граничного условия решение волнового уравнения в линии задержки примет вид

$$u_1(z,r) = \sum_n A_n^{(+)} J_0\left(\tilde{\nu}_{0n}\frac{r}{a}\right)\exp(-i\gamma_n z) \quad \text{при } 0 < z < L; \tag{6}$$

$$u_{1,2}(z,r) = \sum_n \left[J_0\left(\tilde{\nu}_{0n}\frac{r}{a}\right)\left(A_n^{(+)}\exp(-i\gamma_n z) + A_n^{(-)}\exp(i\gamma_n z)\right)\right] \text{ при } 0 < z \le L, \tag{7}$$

где $\tilde{\nu}_{0n}$ – корни производной функции Бесселя нулевого порядка; $\gamma_n^2 = k_1^2 - (\tilde{\nu}_{0n}/a)^2$ (k_1 – волновое число в волноводе); $A_n^{(+)}$, $A_n^{(-)}$ – амплитуды волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси z.

В решении (6) волна, отраженная от границы $z = L$, не учитывается, поскольку длительность импульса меньше времени прохождения волны до границы $z = L$. Напротив, вблизи границы $z = L$ отраженная волна должна учитываться, что описывается решением (7). Осесимметричное решение волнового уравнения в слое жидкости для ультразвукового смещения будем искать в виде

$$u_{2,1}(z,r) = \int_0^\infty \exp(-\beta z) J_0(\alpha r) f(\alpha)\alpha d\alpha = C(r,z)\exp(-ikz) \text{ при } z \ge L, \tag{8}$$

где k – волновое число в слое жидкости; $C(r,z)$ – амплитуда волны, распространяющейся в жидкости.

Если принять во внимание что излучатель является поршневым, то есть на границе $z = 0$ задано смещение u_0, а также потребовать непрерывность ультразвукового смещения и упругого напряжения на границах раздела сред, то граничные условия примут следующий вид:

$$u_1 = u_0 \text{ при } z = 0,\ 0 \le r \le a_1;\ u_1 = 0 \text{ при } r > a_1; \tag{9}$$

$$u_{1,2}(z,r) = u_{2,1}(z,r) \text{ при } z = L;\ u_{2,1}(z,r) = 0 \text{ при } r > a; \tag{10}$$

$$\rho_1 c_1^2 \frac{\partial u_{1,2}(z,r)}{\partial z} = \rho_2 c_2^2 \frac{\partial u_{2,1}(z,r)}{\partial z} \text{ при } z = L, \tag{11}$$

где ρ_1, ρ_2 – плотности материала линии задержки и жидкости; c_1, c_2 – скорости звука в линиях задержки и жидкости.

Применяя граничные условия (9) к выражению (6), получим выражение для коэффициентов $A_n^{(+)}$:

$$A_n^{(+)} = \frac{2u_0 a_1 J_1(\tilde{\nu}_{0n} a_1/a)}{\tilde{\nu}_{0n} a\ J_0^2(\tilde{\nu}_{0n})}. \tag{12}$$

Затем подставляя в граничные условия (10), (11) выражения (7), (8), получим выражение для $C(r,L)$, определяющее радиальное распределение ультразвукового смещения на границе $z = L$ со стороны волновода:

$$C(r,z) = K\sum_n \left[G_n J_0(\tilde{\nu}_{0n} r/a)\exp(-i\gamma_n L)\right], \tag{13}$$

где

$$K = 4u_0 \frac{a_1}{a}\frac{\rho_1 c_1^2 - \rho_2 c_2^2}{\rho_2 c_2^2 \exp(-ikL)},$$

$$G_n = \frac{\gamma_n J_1(\tilde{\nu}_{0n} a_1/a)}{(\gamma_n + k)\tilde{\nu}_{0n} J_0^2(\tilde{\nu}_{0n})}.$$

Применяя к выражению (8) интегральное преобразование Ханкеля в виде

$$f(\alpha) = \int_0^a rC(r, L) J_0(\alpha r) dr$$

и вычислив известный интеграл для функции Бесселя, получим выражение для функции $f(\alpha)$ в явном виде:

$$f(\alpha) = K a^2 \sum_n \left[\frac{G_n J_0(\tilde{\nu}_{0n})}{\exp(i\gamma_n L)} \cdot \frac{(\alpha a) J_1(\alpha a)}{\left((\alpha a)^2 - \tilde{\nu}_{0n}^2\right)} \right]. \quad (14)$$

Подставляя явный вид функции распределения радиальных волн (14) в выражение (8), получим решение волнового уравнения в слое жидкости:

$$u_{2,1}(r, z) = K \sum_n \tilde{G}_n I_n(r, z), \quad (15)$$

где

$$\tilde{G}_n = \frac{\gamma_n J_0(\tilde{\nu}_{0n} a_1/a)\exp(-i\gamma_n L)}{(\gamma_n + k)\tilde{\nu}_{0n} J_0(\tilde{\nu}_{0n})};$$

$$I_n(r, z) = \int_0^\infty \exp(-\beta(x) z) \cdot \frac{x^2 J_1(x) J_0(x r/a)}{\left(x^2 - \tilde{\nu}_{0n}^2\right)} dx;$$

$$x = \alpha a.$$

Выражение (15) описывает дифракционное поле ультразвукового луча, создаваемое торцом цилиндрического акустического волновода.

В качестве приемного устройства будем использовать поршневой приемник радиуса a. Амплитуда ультразвукового сигнала, снимаемого с приемника, определяется выражением (4). Подставив решение (15) в выражение (4), получим зависимость амплитуды ультразвукового сигнала на поршневом приемнике от расстояния до излучателя:

$$U(z) = 2\pi K a^2 \sum_n \tilde{G}_n \tilde{I}_n(z), \quad (16)$$

где

$$\tilde{I}_n(r, z) = \int_0^\infty \exp(-\beta(x) z) \frac{x^2 J_1^2(x)}{\left(x^2 - \tilde{\nu}_{0n}^2\right)} dx.$$

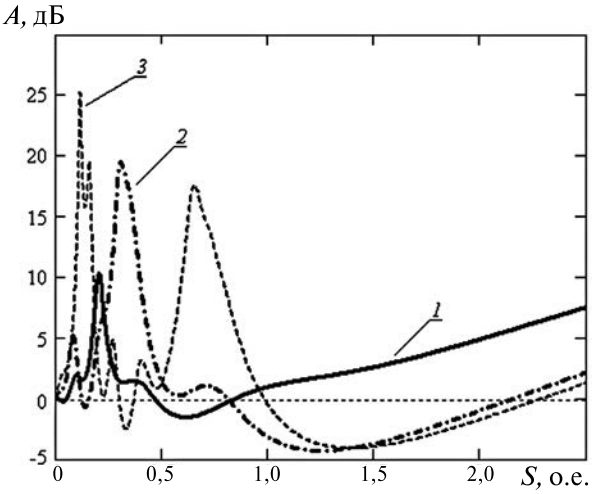


Рис. 3. Зависимости дифракционного затухания ультразвукового поля от обобщенного расстояния между линией задержки и приемником при различных значениях величины *ka*: 100 (1), 200 (2), 300 (3); $a_1 = a$ и $L = 5a$

На рис. 3 представлена зависимость дифракционного затухания, определяемого выражением

$$A(S) = 20\lg\left(|U(0)|/|U(S)|\right),$$

от обобщенного расстояния $S = z\lambda/a^2$, где величина $U(S)$ рассчитывалась по формуле (16).

Результаты расчета, приведенные на рис. 3, указывают на достаточно сложное поведение дифракционного затухания. Его осцилляции при $S < 1$ во много раз превышают осцилляции дифракционного затухания поршневого излучателя. Расчет также показывает, что в определенных областях обобщенного расстояния, наоборот, происходит дифракционное усиление сигнала. Такое поведение полученных кривых можно объяснить только наличием пространственной дисперсии в акустическом волноводе, которая определяет распределение ультразвукового смещения на границе $z = L$ со стороны волновода. Также можно отметить, что при $S < 1{,}5$ влияние дисперсионных эффектов преобладает над влиянием дифракционных, а при $S > 1{,}5$ асимптотическое уменьшение амплитуды сигнала указывает на практически плоский фронт волны; дальнейшее же увеличение его ширины ведет к затуханию, связанному только с дифракцией ультразвукового луча.

Таким образом, в данной работе показано, что при излучении ультразвука в среду через акустический волновод дифракционное поле луча принимает достаточно сложный характер, по сравнению с полем поршневого излучателя. Наличие пространственной дисперсии в волноводе приводит к значительным осцилляциям дифракционного затухания и появлению областей с его отрицательным значением. Поэтому при экспериментальных исследованиях коэффициента поглощения и скорости распространения ультразвуковых волн для аналогичной конструкции излучающего акустического тракта необходимо проводить расчет поправок по приведенной выше методике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кононенко, В.С.** Физические основы прецизионной ультразвуковой спектроскопии и ее применение для исследования релаксационных процессов в слабопоглощающих жидких средах [Текст]: дисс. докт. физ-мат. наук: 01.04.06: защищена 17.10.1994: утверждена 8.06.1995 / Кононенко Вадим Степанович. – Ташкент: АН УзССР, 1994. – 300 с. – Библиогр.: 129.

2. **Шацкий, А.В.** Влияние нелинейных и дифракционных эффектов при измерении коэффициента поглощения ультразвука в жидкости [Текст]: дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.04.03: защищена 03.07.2006: утверждена 10.11.2006 / Шацкий Александр Владимирович. – Самара: ПГАТИ, 2006 – 148 с. – Библиогр.: 80.

3. **Кононенко, В.С.** Дифракционные поправочные формулы для ультразвуковых измерений [Текст] / В.С. Кононенко / Акустический журнал. – 1974. – Т. 22. – № 2. – С. 269–273.

УДК 537.874

А.Ф. Крячко, В.И. Романова, Л.А. Федорова

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛАЗМЕННОГО ВОЛНОВОДА

Одной из характерных особенностей плазменных волноводов является способность поддерживать распространение поверхностной волны при любых отношениях между линейными размерами $2a$ поперечного сечения волновода и рабочей длиной волны λ в вакууме. Если на пути следования поверхностной волны поставить препятствие, то по характеристикам рассеяния можно судить о параметрах плазменного волновода и в первую очередь о плотности плазмы.

Если в месте создания плазменного сгустка возбудить поверхностную волну, а затем на пути сгустка поставить две идеально проводящие пластины, то при входе плазмы в пространство между пластинами поверхностная волна частично отразится, а частично будет преобразована в поле излучения. Так как обычно в приложениях, где такая задача встречает интерес, скорость движения сгустка мала по сравнению с фазовой скоростью волны, а плазма (без магнитного поля) заполняет слой до и внутри пластин, то в качестве модельной может быть предложена следующая задача.

Вдоль плазменного волновода толщиной $2a$ из области $z > 0$ распространяются волны E-типа (рис. 1) с компонентами [1]:

$$H_y^{\mathrm{I}} = \frac{\sin(gx)}{\sin(ga)} e^{-i(\omega t + \gamma z)};$$

$$E_x^{\mathrm{I}} = -\frac{\gamma}{\kappa\varepsilon} \frac{\sin(gx)}{\sin(ga)} e^{-i(\omega t + \gamma z)}; \qquad (1)$$

$$E_z^{\mathrm{I}} = \frac{ig}{\kappa\varepsilon} \frac{\cos(gx)}{\sin(ga)} e^{-i(\omega t + \gamma z)},$$

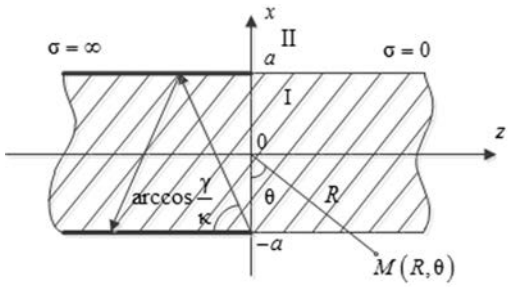


Рис. 1. Геометрическое представление постановки задачи:
I, II – полубесконечный плазменный волновод и вакуум; $M(R, \theta)$ – точка наблюдения; σ – проводимость среды; $\arccos(\gamma/\kappa)$ – угол переотражения электромагнитных волн (показан вектором)

или

$$H_y^{\mathrm{I}} = \frac{\cos(gx)}{\cos(ga)} e^{-i(\omega t + \gamma z)};$$
$$E_x^{\mathrm{I}} = -\frac{\gamma}{\kappa\varepsilon}\frac{\cos(gx)}{\cos(ga)} e^{-i(\omega t + \gamma z)}; \qquad (2)$$
$$E_z^{\mathrm{I}} = \frac{ig}{\kappa\varepsilon}\frac{\sin(gx)}{\cos(ga)} e^{-i(\omega t + \gamma z)}$$

и поверхностная волна в вакууме с компонентами

$$H_y^{\mathrm{II}} = e^{-p(|x|-a)-i(\omega t+\gamma z)};$$
$$E_x^{\mathrm{II}} = -\frac{\gamma}{\kappa} e^{-p(|x|-a)-i(\omega t+\gamma z)}; \qquad (3)$$
$$E_z^{\mathrm{II}} = \frac{ip}{\kappa} e^{-p(|x|-a)-i(\omega t+\gamma z)}.$$

Индекс I относится к волне, распространяющейся внутри плазмы, а индекс II – к поверхностной волне в вакууме.

В выражениях (1 – 3) введены обозначения: $g = \sqrt{\kappa^2\varepsilon - \gamma^2}$, $p = \sqrt{\gamma^2 - \kappa^2}$, γ – действительные корни дисперсионного уравнения; ε – комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы; $\kappa = \frac{\omega}{c}$ – волновое число; ω – круговая частота (c – скорость света).

Если $H_y, E_x \approx \cos gx$, то волну будем называть симметричной, а если $H_y, E_x \approx \sin gx$, – то несимметричной.

Дисперсионные уравнения для симметричной и несимметричной волн соответственно имеют вид [1]:

$$g\,\mathrm{tg}(ga) = \varepsilon p;$$
$$g\,\mathrm{ctg}(ga) = -\varepsilon p. \qquad (4)$$

Возникающее на краю пластины рассеянное поле разложим в интеграл Фурье.

Для симметричных волн получим выражения:

$$H_y^{\mathrm{pac.I}} = \int_{-\infty}^{\infty} h\frac{\cos(\beta x)}{\cos(\beta a)} e^{iqz}\,dq;$$
$$E_z^{\mathrm{pac.I}} = \int_{-\infty}^{\infty} h\frac{i\beta}{\kappa\varepsilon}\frac{\sin(\beta x)}{\cos(\beta a)} e^{iqz}\,dq; \qquad (5)$$

$$H_y^{\mathrm{pac.II}} = \int_{-\infty}^{\infty} He^{-\nu(x-a)+iqz}\,dq;$$
$$E_z^{\mathrm{pac.II}} = -\int_{-\infty}^{\infty} H\frac{i\nu}{\kappa} e^{-i\nu(x-a)+iqz}\,dq. \qquad (6)$$

Для несимметричных волн –

$$H_y^{\mathrm{pac.I}} = \int_{-\infty}^{\infty} h\frac{\sin(\beta x)}{\sin(\beta a)} e^{iqz}\,dq;$$
$$E_z^{\mathrm{pac.I}} = \int_{-\infty}^{\infty} h\frac{ig}{\kappa\varepsilon}\frac{\cos(\beta x)}{\sin(\beta a)} e^{iqz}\,dq; \qquad (7)$$

$$H_y^{\mathrm{pac.II}} = \int_{-\infty}^{\infty} He^{-\nu(x-a)+iqz}\,dq;$$
$$E_z^{\mathrm{pac.II}} = -\int_{-\infty}^{\infty} H\frac{i\nu}{\kappa} e^{-i\nu(x-a)+iqz}\,dq. \qquad (8)$$

Введены обозначения: $\beta = \sqrt{\kappa^2\varepsilon - q^2}$, $\nu = \sqrt{q^2 - \kappa^2}$, q – корни дисперсионного уравнения.

На поверхности идеально проводящей пластины потребуем, чтобы полное тангенциальное поле E_{tg} обращалась в нуль, а на границе плазма –вакуум потребуем непрерывности полных полей.

При $x = \pm a$, $z > 0$, $H_y^{\mathrm{I}} = H_y^{\mathrm{II}}$, $E_z^{\mathrm{I}} = E_z^{\mathrm{II}}$ для несимметричных волн [1]:

$$e^{-i\gamma z} + \int_{-\infty}^{\infty} he^{iqz}\,dq = e^{-i\gamma z} + \int_{-\infty}^{\infty} He^{iqz}\,dq;$$

$$\frac{ig}{\kappa\varepsilon}\operatorname{ctg}(ga)e^{-i\gamma z}+\int_{-\infty}^{\infty}h\frac{i\beta}{\kappa\varepsilon}\operatorname{ctg}(\beta a)e^{iqz}dq=$$

$$=\frac{-ip}{\kappa}e^{-i\gamma z}-\int_{-\infty}^{\infty}H\frac{i\gamma}{\kappa}e^{iqz}dq,$$

откуда получаем равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}[h-H]e^{iqz}dq=0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}h\frac{i\beta}{\kappa\varepsilon}\operatorname{ctg}(\beta a)e^{iqz}dq=-\int_{-\infty}^{\infty}H\frac{i\nu}{\kappa}e^{iqz}dq; \tag{9}$$

для симметричных волн –

$$\int_{-\infty}^{\infty}[h-H]e^{iqz}dq=0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}h\frac{i\beta}{\kappa\varepsilon}\operatorname{tg}(\beta a)e^{iqz}dq=\int_{-\infty}^{\infty}H\frac{i\nu}{\kappa}e^{iqz}dq. \tag{10}$$

При $x=\pm a$, $z<0$, $E_z^{\mathrm{I}}=E_z^{\mathrm{II}}=0$

для несимметричных волн –

$$\frac{ig}{\kappa\varepsilon}\operatorname{ctg}(ga)e^{-i\gamma z}+\int_{-\infty}^{\infty}h\frac{i\beta}{\kappa\varepsilon}\operatorname{ctg}(\beta a)e^{iqz}dq=0;$$

$$\frac{ip}{\kappa}e^{-i\gamma z}-\int_{-\infty}^{\infty}H\frac{i\nu}{\kappa}e^{iqz}dq=0; \tag{11}$$

для симметричных волн –

$$\frac{ig}{\kappa\varepsilon}\operatorname{ctg}(ga)e^{-iqz}-\int_{-\infty}^{\infty}h\frac{i\beta}{\kappa\varepsilon}\operatorname{tg}(\beta a)e^{iqz}dq=0;$$

$$\frac{-ip}{\kappa}e^{-i\gamma z}-\int_{-\infty}^{\infty}H\frac{i\nu}{\kappa}e^{iqz}dq=0. \tag{12}$$

Задача сопряжения и ее решение

Равенства (9), (10), а также (11), (12) представляют собой систему парных интегральных уравнений, которые по лемме Рапопорта могут быть преобразованы в граничную задачу для функций, аналитических в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной q [2]:

$$h-H=\varphi^{+};$$

$$\alpha_1 h-\alpha_0 H=\psi^{+};$$

$$\alpha_1 h-\frac{A}{2\pi i(q+\gamma)}=\xi^{-}; \tag{13}$$

$$\alpha_0 H-\frac{A}{2\pi i(q+\gamma)}=\chi^{-},$$

где φ^{+}, ψ^{+} – функции, аналитические в верхней полуплоскости комплексного переменного q; ξ^{-}, χ^{-} – функции, аналитические в нижней полуплоскости. Введены также следующие обозначения:

для несимметричных волн –

$$\alpha_1(q)\equiv\frac{i\beta}{\kappa\varepsilon}\operatorname{ctg}(\beta a);$$

$$\alpha_0(q)=-\frac{i\nu}{\kappa}; \tag{13а}$$

для симметричных волн –

$$\alpha_1(q)=-\frac{i\beta}{\kappa\varepsilon}\operatorname{tg}(\beta a);$$

$$\alpha_0(q)=-\frac{i\nu}{\kappa}; \tag{13б}$$

в обоих случаях $A\equiv\alpha_1(\gamma)=\alpha_0(\gamma)$.

Из формул (13) видно, что $\psi^{+}=\xi^{-}-\chi^{-}$, то есть эта функция аналитична на всей плоскости и ограничена, следовательно, по теореме Лиувилля, она там постоянна [4]. Для ее определения достаточно рассмотреть поведение функций ξ^{-} и χ^{-} на бесконечности.

В силу их ограниченности функции h и H должны убывать при $q\to\infty$ не хуже, чем функция q^{-1}. Следовательно,

$$(\xi^{-}-\chi^{-})=\alpha_1 h-\alpha_0 H=0 \text{ при } q\to\infty.$$

Но если $(\xi^{-}-\chi^{-})=\mathrm{const}$, то при $\psi^{+}\equiv 0$ на всей плоскости комплексного переменного q тогда справедливы выражения

$$H=\frac{\alpha_1}{\alpha_0}h;$$

$$\varphi^{+}=h\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right);$$

$$\xi^- = \alpha_1\varphi^+\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^{-1} - \frac{A}{2\pi i(q+\gamma)};$$

$$\varphi^+ = \frac{\alpha_0-\alpha_1}{\alpha_0\alpha_1}\left[\xi^- + \frac{A}{2\pi i(q+\gamma)}\right].$$

Из условия на бесконечности следует, что $\operatorname{Im}\kappa > 0$. Тогда запишем равенство

$$\varphi^+\sqrt{\frac{q+\kappa}{\kappa}} = \frac{\alpha_0-\alpha_1}{-C\alpha_1}\times$$

$$\times\left\{\frac{C\xi^-}{i\sqrt{\frac{q-\kappa}{\kappa}}} + \frac{AC}{i2\pi i(q+\gamma)\sqrt{\frac{q-\kappa}{\kappa}}}\right\}, \qquad (14)$$

где $C = \lim\limits_{q\to\infty}\dfrac{\alpha_0-\alpha_1}{\alpha_1} = |\varepsilon| - 1.$

Обозначив

$$\Phi^+ = \varphi^+\sqrt{\frac{q+\kappa}{\kappa}};$$

$$\Phi^- = -C\xi^-\frac{1}{i\sqrt{\frac{q-\kappa}{\kappa}}},$$

перепишем равенства (14) в виде

$$\Phi^+ = \frac{\alpha_0-\alpha_1}{-C\alpha_1}\left\{\Phi^- - \frac{AC}{i2\pi i(q+\gamma)\sqrt{\frac{q-\kappa}{\kappa}}}\right\}. \qquad (15)$$

Решение граничной задачи (15) может быть найдено [6]. Оно имеет вид

$$\xi^- = -\frac{i}{C}\sqrt{\frac{q-\kappa}{\kappa}}\frac{X^-(q)}{2\pi i}\frac{AC}{2\pi}\times$$

$$\times\int_{\cap}\frac{d\tau}{X^-(\tau)(\tau+\gamma)\sqrt{\frac{\tau-\kappa}{\kappa}(\tau-q)}}, \qquad (16)$$

где $X^+(q), X^-(q)$ – решения однородной задачи сопряжения:

$$X^+(q) = \frac{\alpha_0-\alpha_1}{C\alpha_1}X^-(q). \qquad (16а)$$

Интегралы в выражении (16) легко вычисляются через вычеты [3]:

$$\varphi^+(q) = -\frac{ACX^+(q)}{2\pi iX^-(-\gamma)(q+\gamma)\sqrt{(q+\kappa)(\gamma+q)}};$$

$$\xi^-(q) = -\frac{q}{2\pi i(q+\gamma)}\left(1-\frac{X^-(q)}{X^-(-\gamma)}\sqrt{\frac{\kappa-q}{\kappa+\gamma}}\right). \qquad (17)$$

Вычисление поверхностной волны

Компоненты Фурье искомых полей выражаются через функции φ^+, ξ^- следующим образом:

при $z > 0$

$$h = \frac{\alpha_0}{\alpha_0-\alpha_1}\varphi^+;$$

$$H = \frac{\alpha_1}{\alpha_0-\alpha_1}\varphi^+; \qquad (18)$$

при $z < 0$

$$H = \frac{1}{\alpha_0}\left(\xi^- + \frac{A}{2\pi i(q+\gamma)}\right). \qquad (19)$$

Подставляя выражения (17) в (18) и (19), получим выражения для искомых полей через решение следующей задачи:

для $z > 0$

$$H_y^{\text{II}} = e^{-p(x-a)-i\gamma z} -$$

$$-\frac{AC\kappa}{2\pi i\sqrt{\kappa+\gamma}X^-(-\gamma)}\times \qquad (20)$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha_1X^+(q)e^{-\nu(x-a)+iqz}}{(\alpha_0-\alpha_1)\sqrt{q+\kappa}(q+\gamma)}dq;$$

для $z < 0$

$$H_y^{\text{II}} = e^{-p(x-a)-i\gamma z} + \\ + \frac{A}{2\pi i\sqrt{\kappa+\gamma}X^-(-\gamma)} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X^-(q)\sqrt{\kappa-q}e^{-\nu(x-a)+iqz}}{\alpha_0(q+\gamma)}dq. \quad (21)$$

Полюса подынтегрального выражения (20) соответствуют отраженной поверхностной волне $q=-\gamma$ и другим собственным волнам плазменного слоя, которые при выбранной частоте не распространяются, а экспоненциально затухают от места неоднородности (комплексные корни дисперсионного уравнения) с бесконечно малой действительной частью.

Интеграл по разрезам, соединяющим точки ветвления $\sqrt{q^2-\kappa^2}$, описывает непрерывную реальную часть спектра рассеянного поля, уходящего от края пластин в свободное пространство.

Расчет поля излучения в дальней зоне

Аналитическое выражение для поля в дальней зоне ($\kappa R >> 1$) можно найти из выражения (20) методом перевала. Для этого сделаем замену переменной интегрирования $q = \kappa\cos\varphi$. При этом плоскость комплексного переменного q переходит в полосу, определяемую равенством $\gamma = \arccos\frac{q}{\kappa}$.

Для определенности выбираем ту ветвь γ, для которой при $q=0$ фаза $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда контур интегрирования, проходящий на плоскости q по вещественной оси, переходит на плоскость φ в контур l (рис. 2).

На участке AB плоскости q (на верхнем берегу разреза) фаза равна $\frac{\pi}{2}$, а на участке BC (на нижнем берегу разреза) фаза равна нулю. Соответственно φ меняется от $\pi - i\infty$ до $0 + i\infty$.

В результате замены переменной и перехода к полярной системе координат $(R,\ \theta)$ получим формулы перехода $(x-a) = R\sin\theta$, $z = R\cos\theta$.

Выражение (20) примет вид:

$$H_y^{\text{II}} = e^{-p(x-a)-i\gamma z} - \\ - \frac{AC\kappa}{2\pi i\sqrt{\kappa+\gamma}X^-(-\gamma)} \times \\ \times \int_l \frac{\alpha_1 X^+(q)e^{i\kappa R\cos(\varphi-\theta)}\kappa\sin\varphi}{(\alpha_0-\alpha_1)(\kappa\cos\varphi+\gamma)\sqrt{\kappa\cos\varphi+\kappa}}d\varphi. \quad (22)$$

Интегральное выражение представляет собой интеграл вида

$$I(\rho) = \int_L \varphi(w)e^{\rho f(w)}dw$$

при больших значениях параметра ρ, величина которого в основном определяется тем участ-

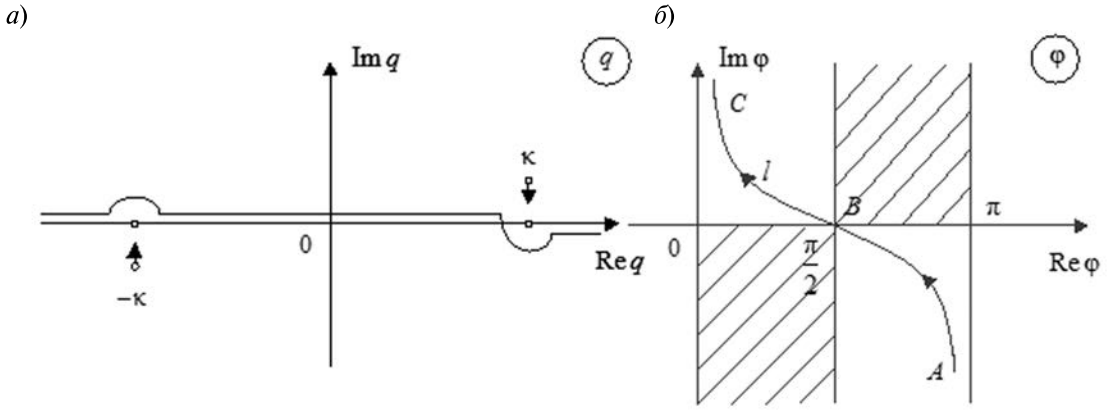


Рис. 2. Формы пути интегрирования компонент электромагнитного поля в комплексных плоскостях $q(a)$ и φ ($б$); κ – волновое число

ком пути интегрирования L, на котором $\left|e^{\rho f(w)}\right| = e^{\rho \operatorname{Re} f(w)}$ велика по сравнению со значением на остальной части L. Деформируем путь интегрирования в области аналитичности $f(w)$ так, чтобы он проходил через седловую точку в направлении наиболее быстрого спуска [7]. Седловая точка определяется из условия $f(w)=0,\ \varphi_s = \theta - m\pi,\ m = 0, \pm 1, \ldots$.

Таким образом,

$$H_y^{\text{II}} = \sum_{\varphi_s}\left[e^{-p(x-a)-i\gamma z} + \frac{AC\kappa}{2\pi i\sqrt{\kappa+\gamma}X^-(-\gamma)}\times \right.$$
$$\times \frac{\alpha_1(\varphi_S)}{(\alpha_0-\alpha_1)_{|\varphi=\varphi_S}} \cdot \frac{\kappa}{(\kappa\cos\varphi_S+\gamma)}\times \qquad (23)$$
$$\left. \times \frac{\sin\varphi_S}{\sqrt{\kappa\cos\varphi_S+\kappa}} \cdot I \right],$$

где

$$I \equiv \int_{-\Delta\varphi}^{\Delta\varphi} e^{i\kappa R\cos(\varphi-\theta)}d\varphi. \qquad (24)$$

Для приведения интеграла (24) к интегралу Пуассона делаем замену

$$\frac{i\kappa R}{2}(\Delta\varphi)^2 = S^2. \qquad (25)$$

Из двух значений S, определяемых заменой (25), выбираем соответственно по контуру интегрирования l тот корень, для которого справедливы условия

$$\operatorname{Re} S < 0,\ \operatorname{Im}\Delta\varphi > 0;$$

$$\operatorname{Re} S > 0,\ \operatorname{Im}\Delta\varphi < 0;$$

$$I = e^{i\kappa R}\sqrt{\frac{2\pi}{i\kappa R}}. \qquad (26)$$

Подставляя условия (26) в выражение (23), получаем для поля излучения в дальней зоне:

$$H_y^{\text{рас}} = \frac{AC\sin\theta}{2\pi i}\cdot\frac{\sqrt{\frac{2\pi}{i\kappa R}}}{\sqrt{\left(1+\frac{\gamma}{\kappa}\right)(1+\cos\theta)}}\times$$
$$\times\frac{X^+(\cos\theta)e^{i\kappa R}}{\left(\cos\theta+\frac{\gamma}{\kappa}\right)X^-(-\gamma)}\cdot\left.\frac{\alpha_0}{(\alpha_0-\alpha_1)}\right|_{\varphi_S}. \qquad (27)$$

Компоненты $E_x^{\text{рас}}$ и $E_z^{\text{рас}}$ выражаются через $H_y^{\text{рас}}$ соответствующим образом:

$$E_x^{\text{рас}} = (\cos\theta)\cdot H_y^{\text{рас}}; \qquad (28)$$

$$E_z^{\text{рас}} = -(\sin\theta)\cdot H_y^{\text{рас}}. \qquad (29)$$

Вычисление диаграммы направленности

Поток энергии, который излучается в месте неоднородности (на единицу длины вдоль оси y), выражается как [5]

$$P = \int_{\sigma}\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,d\nu, \qquad (30)$$

где σ – цилиндрическая поверхность в волновой зоне.

Отраженная волна уносит в единицу времени энергию, равную

$$\bar{P}_{\text{рас}} = \frac{2c}{8\pi}\int_0^{0,5\pi}\left|H_y^{\text{рас}}\right|^2 R\,d\theta. \qquad (31)$$

В случае несимметричных волн

$$\bar{P}_{\text{рас}} = \frac{C\left(\frac{\gamma}{\kappa}-1\right)\cdot(|\varepsilon|-1)^2}{8\pi^2\kappa\left|X^-(-\gamma)\right|^2}\int_0^{0,5\pi}\frac{\sin^2\theta}{\left(\frac{\gamma}{\kappa}+\cos\theta\right)^2}\times$$
$$\times\frac{\left|X^+(\cos\theta)\right|^2 d\theta}{\left[|\varepsilon|^2\sin^2\theta+\mu^2\operatorname{cth}^2(\kappa a\mu)\right](1+\cos\theta)}, \qquad (32)$$

а для симметричных волн

$$\overline{P}_{\text{рас}} = \frac{C\left(\frac{\gamma}{\kappa}-1\right)\left(|\varepsilon|-1\right)^2}{8\pi^2\kappa\left|X^-(-\gamma)\right|^2}\int\limits_0^{0,5\pi}\frac{\sin^2\theta}{\left(\frac{\gamma}{\kappa}+\cos\theta\right)^2}\times$$
$$\times\frac{\left|X^+(\cos\theta)\right|^2\mu^2\operatorname{th}^2(\kappa a\mu)\,d\theta}{\left[|\varepsilon|^2\sin^2\theta+\mu^2\operatorname{th}^2(\kappa a\mu)\right](1+\cos\theta)}, \quad (33)$$

где $\mu=\sqrt{|\varepsilon|+\cos^2\theta}$, $\varepsilon<0$.

Диаграмма направленности в случае несимметричных и симметричных волн, соответственно, следует выражениям

$$F^2(\theta)=\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)}\cdot\frac{\left(|\varepsilon|+\cos^2\theta\right)}{\left(\frac{\gamma}{\kappa}+\cos\theta\right)^2}\cdot\left|X^+(\cos\theta)\right|^2\times$$
$$\times\frac{\operatorname{cth}^2(\kappa a)\sqrt{|\varepsilon|+\cos^2\theta}}{\left[|\varepsilon|^2\sin^2\theta+\left(|\varepsilon|+\cos^2\theta\right)\operatorname{cth}^2(\kappa a)\sqrt{|\varepsilon|+\cos^2\theta}\right]}; \quad (34)$$

$$F^2(\theta)=\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)}\cdot\frac{\left(|\varepsilon|+\cos^2\theta\right)}{\left(\frac{\gamma}{\kappa}+\cos\theta\right)^2}\cdot\left|X^+(\cos\theta)\right|^2\times$$
$$\times\frac{\operatorname{th}^2(\kappa a)\sqrt{|\varepsilon|+\cos^2\theta}}{\left[|\varepsilon|^2\sin^2\theta+\left(|\varepsilon|+\cos^2\theta\right)\operatorname{th}^2(\kappa a)\sqrt{|\varepsilon|+\cos^2\theta}\right]}. \quad (35)$$

Коэффициент отражения электромагнитных волн в точке неоднородности

Деформируя пути интегрирования в интеграле (20) наверх, преобразуем его к сумме вычетов относительно полюсов q_n и в интеграл по разрезу, который целесообразно провести от точки $q=\kappa$ по мнимой оси (рис. 3).

Тогда получим выражения для поля

$$H_y^{\text{II}} = e^{-p(x-a)-i\gamma z} + \sum_{n=1}^{\infty}R_{0n}e^{iq_nz}+Q_z, \quad (36)$$

где

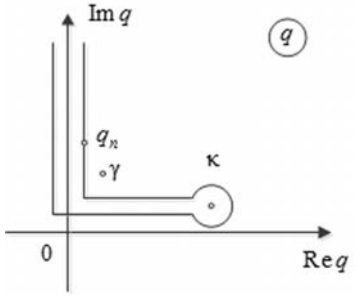


Рис. 3. Форма пути интегрирования для формулы (20) в комплексной плоскости q; показано положение корней γ, q_n и κ относительно пути интегрирования

$$R_{0n}=\frac{i\left(|\varepsilon|-1\right)}{(q_n+\gamma)}\cdot\frac{\sqrt{\gamma-\kappa}}{\sqrt{q_n+\kappa}}\cdot\frac{X^+(q_n)}{X^-(-\gamma)}\times$$
$$\times\frac{\alpha_1(q_n)\exp\left[-(x-a)\sqrt{q_n^2-\kappa^2}\right]}{\left(\alpha_0-\alpha_1\right)q'\Big|_{q=q_n}}; \quad (37)$$

$$Q_z=\frac{\left(|\varepsilon|-1\right)\sqrt{\gamma-\kappa}}{2\pi X^-(-\gamma)}\int\limits_{\cup\Gamma_1}\frac{\alpha_1(q')}{\left[\alpha_0(q')-\alpha_1(q')\right]}\times$$
$$\times\frac{X^+(q')e^{-\nu(x-a)+iq'z}}{(q'+\gamma)\sqrt{q'+\kappa}}dq'. \quad (38)$$

Здесь R_{0n} – коэффициент трансформации по полю волны данного типа в волну с волновым вектором q_n; R_{00} – коэффициент отражения при $x=a$:

$$R_{00}\equiv\frac{\left(|\varepsilon|-1\right)\sqrt{\gamma-\kappa}X^+(\gamma)\alpha_1(\gamma)\kappa}{2\gamma^2\sqrt{\gamma+\kappa}X^-(-\gamma)\left[\frac{a}{|\varepsilon|}-\frac{1}{p}+\frac{p^2}{g'^2}\left(\frac{1}{p}-a|\varepsilon|\right)\right]}, \quad (39)$$

где $g'=\sqrt{\kappa^2|\varepsilon|+\gamma^2}$, $\gamma=g_0$.

На больших расстояниях от неоднородности выражение (36) принимает простой вид, так как в этом случае можно пренебречь всеми затухающими волнами (с чисто мнимыми q_n), а также слагаемым $Q(z)$, убывающим как $\frac{1}{z^m}$ при $m>0$.

Покажем, что в волновой зоне существует лишь волна отраженная. Будем исходить от противного.

Допустим, что при $z >> 1$ существуют незатухающие или слабо затухающие (с очень малой мнимой частью q_n) волны $q_n \neq \gamma$. Очевидно, q_n должны удовлетворять дисперсионному уравнению вида

$$\beta \mathrm{tg}(\beta a) = \varepsilon p$$

(для симметричных волн);

$$\beta \mathrm{ctg}(\beta a) = -\varepsilon p$$

(для несимметричных волн),
а не $\beta' \mathrm{tg}(\beta' a) = \varepsilon p$ и $\beta' \mathrm{ctg}(\beta' a) = -\varepsilon p$, соответственно.

Для этого необходимо, чтобы

$$\kappa^2 \varepsilon - q_n^2 > 0 .$$

Но в данной задаче $\varepsilon < 0$. Таким образом, приходим к противоречию. С одной стороны, $q_n^2 < \sigma_n^2$, а с другой –

$$q_n^2 > \kappa^2 |\varepsilon| + \sigma_n^2 + 2i\sigma_n\tau_n,$$

где $\sigma_n \equiv \mathrm{Re}\, q_n$, $\tau_n \equiv \mathrm{Im}\, q_n$.

Таким образом, для частот ω и плотности плазмы, для которых $\varepsilon < 0$, в волновой зоне существует только отраженная волна $\mathrm{Re}^{-i(\omega t - \gamma z)}$. Все остальные волны с отличным от γ волновым числом являются сильно затухающими и энергию не уносят. Тогда коэффициент отражения можно записать в виде

$$R_{00} \equiv -\frac{(|\varepsilon| - 1)(\gamma - \kappa) X^+(\gamma)}{2\gamma^2 X^-(-\gamma)\left[\dfrac{a}{|\varepsilon|} - \dfrac{1}{p} - \dfrac{a|\varepsilon| p^2}{g'^2} + \dfrac{p}{g'^2}\right]}. \quad (40)$$

Дальнейшее вычисление сводится к решению граничной задачи (16а). Однако сначала необходимо исследовать зависимость фазовой скорости поверхностной волны от толщины плазменного слоя, то есть от параметра κa.

Дисперсионные уравнения для анализа поведения симметричных и несимметричных волн

С целью исследования поведения фазовой скорости решаем уравнение (4). Для очень малых $\kappa a < 0,2$ (тонкий волновод) можно воспользоваться асимптотическими формулами:

для несимметричных волн –

$$\gamma \approx \kappa \sqrt{1 + \frac{1}{(\kappa a |\varepsilon|)^2}}; \quad (41)$$

для симметричных волн –

$$\gamma \approx \kappa \left[1 + 2(\kappa a)^2\right]. \quad (42)$$

В области больших значений κa (широкий волновод, высокие частоты), т. е.

$$\kappa a > \frac{\sqrt{|\varepsilon| - 1}}{2|\varepsilon|} \ln \frac{2|\varepsilon| 10^n}{|\varepsilon|^2 - 1},$$

асимптотики одинаковы для симметричных и несимметричных волн в случае, если корни дисперсионного уравнения имеют вид

$$\gamma_0 \approx \kappa \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{|\varepsilon| - 1}}. \quad (43)$$

Для промежуточных значений κa, т. е.

$$0,2 \le \kappa a \le \frac{\sqrt{|\varepsilon| - 1}}{2|\varepsilon|} \ln \frac{2|\varepsilon| \cdot 10^n}{|\varepsilon|^2 - 1},$$

где n определяется необходимой точностью вычислений, корни трансцендентного уравнения надо искать численно. Полученные зависимости приведены на рис. 4 для различных значений $|\varepsilon|$. Видно, что в случае низких частот или плотной плазмы $(|\varepsilon| >> 1)$ область, где справедлива асимптотика (43), простирается вплоть до нуля. Для таких значений диэлектрической проницаемости волновой вектор не зависит от толщины волновода, так как волна «вытесняется» из плазмы и распространяется вдоль ее поверхности:

$$H_y^{\mathrm{II}} \approx \exp\left[-p(x - a) - i\gamma z\right];$$

$$p = \sqrt{\gamma^2 - \kappa^2}; \ \gamma \approx \kappa$$

при $|\varepsilon| >> 1$ и $\gamma \approx \gamma_0$.

Для любой толщины плазменного слоя $p \approx 0$, а амплитуда поверхностной волны име-

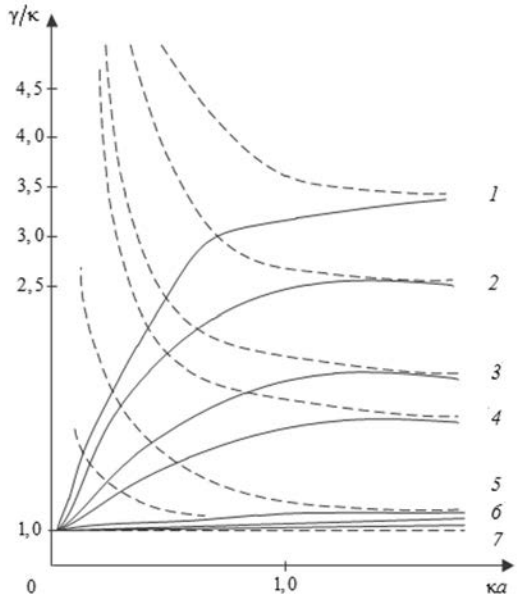


Рис. 4. Зависимости действительных корней дисперсионного уравнения от параметра кa для симметричных (сплошные линии) и несимметричных (пунктиры) волн при различных значениях диэлектрической проницаемости $|\varepsilon|$: 1,1(*1*) ; 1,2(*2*) ; 1,5(*3*); 2,0(*4*); 5(*5*); 10(*6*); 50(*7*)

ет значение порядка единицы; это означает, что вся вводимая энергия распространяется над плазмой в вакууме и волна «не чувствует» толщины волновода.

Если плазма неплотная или частоты не низкие $(|\varepsilon| \approx 1)$, то область, где поведение симметричных и несимметричных волн отличается заметно, простирается от $\kappa a \approx 0{,}2$ до $\kappa a \approx 1{,}0$.

Вычисление аналитических функций X^+ и X^-

Функции $X^+(q)$ и $X^-(q)$ являются решением (16а). Они могут быть записаны через $\Gamma^+(q)$ и $\Gamma^-(q)$:

$$\begin{aligned} X^+(q) &= \exp\Gamma^+(q); \\ X^-(q) &= \exp\Gamma^-(q), \end{aligned} \qquad (44)$$

где

$$\Gamma^+(q) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\cup} \ln\frac{\alpha_0-\alpha_1}{C\alpha_1}\frac{d\tau}{\tau-q};$$

$$\Gamma^-(q) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\cap} \ln\frac{\alpha_0-\alpha_1}{C\alpha_1}\frac{d\tau}{\tau-q}. \qquad (45)$$

Имеет смысл отдельно рассмотреть два случая:

1. $\kappa a\sqrt{|\varepsilon|} >> 1$;

2. $\kappa a \le 1,\ |\varepsilon \approx 1|$.

В первом случае поведение симметричных и несимметричных волн совпадают, во втором – дисперсионные кривые «разбегаются».

Вычислим $\left|X^+(\cos\theta)\right|^2$.

Здесь возможны два случая:

а) $|\varepsilon| >> 1,\ \kappa a \approx 1$;

б) $|\varepsilon| \approx 1,\ \kappa a >> 1$.

Для случая (а):

$$\left|X^+(\cos\theta)\right|^2 = \exp\left\{2\,\mathrm{Re}\,\Gamma^+(\cos\theta)\right\};$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\Gamma^+(\cos\theta) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\ln\left(\frac{-i|\varepsilon|\sin\theta-\sqrt{|\varepsilon|}}{(|\varepsilon|-1)\sqrt{|\varepsilon|}}\right)+ \\ &+\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{|\varepsilon|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+|\varepsilon|}}{(|\varepsilon|-1)\sqrt{x^2+|\varepsilon|}}\frac{dx}{(x-\cos\theta)} \end{aligned} \qquad (46)$$

(символ *V.P.* означает, что интеграл берется в смысле главного значения по Коши).

Интеграл (46) сводится к табличным интегралам, и окончательно получаем:

$$\left|X^+(\cos\theta)\right|^2 = \frac{1+\cos\theta}{(|\varepsilon|-1)}\sqrt{1+|\varepsilon|\sin^2\theta}. \qquad (47)$$

Для случая (б) для удобства интегрирования вводим функции $X_1^+(x)$, $X_1^-(x)$:

$$\begin{aligned} X_1^+(x) &= X^+(x)\frac{x+i\sqrt{|\varepsilon|}}{x+t_0}; \\ X_1^-(x) &= X^-(x)\frac{x-t_0}{x-i\sqrt{|\varepsilon|}}. \end{aligned} \qquad (48)$$

Тогда для аналитической функции $G_1(x)$ можно записать выражение [8]:

$$G_1(x)=\frac{\left(|\varepsilon|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{|\varepsilon|+x^2}\right)\sqrt{|\varepsilon|+x^2}}{\left(|\varepsilon|-1\right)\left(x^2-t_0^2\right)}; \quad (49)$$

$$\left|X^+(\cos\theta)\right|^2=\frac{(\cos\theta+t_0)^2}{\left(\cos^2\theta+|\varepsilon|\right)}\left|X_1^+(\cos\theta)\right|^2; \quad (50)$$

$$X_1^+(\cos\theta)=\exp\left\{\frac{1}{2}\ln G_1(\cos\theta)+\frac{1}{2\pi i}V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln G_1(\cos\theta)}{x-\cos\theta}dx\right\}. \quad (51)$$

Входящий в равенство (51) интеграл в смысле главного значения можно вычислить с помощью асимптотик. Основной вклад дает вычет

$$\left|X^+(\cos\theta)\right|^2=\sqrt{1+|\varepsilon|\sin^2\theta}\exp\left\{-\frac{2\cos\theta}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{|\varepsilon|}\right\}. \quad (52)$$

Подставляя этот вычет в равенство (50), окончательно получим выражение для вычета

$$\left|X^+(\cos\theta)\right|^2=\frac{\sqrt{1+|\varepsilon|\sin^2\theta}}{\left(|\varepsilon|-1\right)}\exp\left[-\frac{\cos\theta}{2}\right]. \quad (53)$$

2. Во втором случае $\left(\kappa a\le 1,\ |\varepsilon|\approx 1\right)$ удобно решение (16а) переписать в виде

$$X_1^+(x)=G_1(x)X_1^-(x),$$

где для несимметричных волн –

$$X_1^+(x)=\frac{(x+i\sqrt{|\varepsilon|})}{\sqrt{\kappa a}\,(x+q)}\cdot\frac{\prod_0^\infty(\delta_{1n}x+id_{1n})}{\prod_1^\infty(\delta_2 x+id_{2n})}X^+(x);$$

$$X_1^-(x)=\sqrt{\kappa a}\,(x-q)\frac{\prod_1^\infty(\delta_2 x-id_{2n})}{\prod_0^\infty(\delta_{1n}x-id_{1n})}X^-(x); \quad (54)$$

$$G_1(x)=\frac{\left(f|\varepsilon|-\mu'\operatorname{ctg}(\mu'\kappa a)\right)\left(x+i\sqrt{|\varepsilon|}\right)}{\left(|\varepsilon|-1\right)\left(x^2-q^2\right)};$$

для симметричных волн –

$$X_1^+(x)=\frac{(x+i\sqrt{|\varepsilon|})^2\sqrt{\kappa a}}{(x+q)}\cdot\frac{\prod_1^\infty(\delta_{2n}x+id_{2n})}{\prod_0^\infty(\delta_{1n}x+id_{1n})}X^+(x);$$

$$X_1^-(x)=\frac{(x-q)}{\sqrt{\kappa a}\left(x-i\sqrt{|\varepsilon|}\right)}\frac{\prod_0^\infty(\delta_{1n}x-id_{1n})}{\prod_1^\infty(\delta_{2n}x-id_{2n})}X^-(x); \quad (55)$$

$$G_1(x)=\frac{\left(f|\varepsilon|-\mu'\operatorname{tg}(\mu'\kappa a)\right)\left(x+i\sqrt{|\varepsilon|}\right)}{\left(|\varepsilon|-1\right)\left(x^2-q^2\right)}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\delta_{1n}=\frac{2\kappa a}{(2n+1)\pi};\ \delta_{2n}\equiv\frac{\kappa a}{n\pi};\ d_{1n}\equiv\sqrt{1+|\varepsilon|\delta_{1n}^2};$$

$$d_{2n}\equiv\sqrt{1+|\varepsilon|\delta_{2n}^2};\ f\equiv\sqrt{x^2-1};$$

$$\mu'\equiv\sqrt{x^2+|\varepsilon'|}; \quad (56)$$

x,q – безразмерные волновые числа, причем q является корнем дисперсионного уравнения.

Задача свелась к нахождению $X_1^+(\cos\theta)$. Решение однородной задачи Римана, как это вытекает из формул Сохоцкого – Племеля, имеет вид

$$X_1^+(\cos\theta)=\exp\left\{\frac{1}{2}\ln G_1(\cos\theta)+\frac{1}{2\pi i}V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln G_1(\cos\theta)}{x-\cos\theta}dx\right\}. \quad (57)$$

Для вычисления интеграла в смысле главного значения в (57) разбиваем путь интегрирования на три области: $(-\infty,-1),(-1,+1),(1,+\infty)$. Поскольку логарифм есть слабая функция своего аргумента, то воспользуемся асимптотиками.

Наибольший вклад (по порядку такой же, как и вычет) дает интеграл на участке $(-1,+1)$. Но этот вклад чисто мнимый. Интегралы по отрезкам $(-\infty,-1),(1,+\infty)$ обращаются в нуль. В результате получаем выражения:

для несимметричных волн –

$$\left|X^+(\cos\theta)\right|^2 = \frac{(q+\cos\theta)^2}{\kappa a\left(|\varepsilon|-1\right)q^2}\times$$
$$\times\frac{\sqrt{|\varepsilon|\left[1+\kappa^2q^2|\varepsilon|^2\right]}}{\sqrt{\left(|\varepsilon|+\cos^2\theta\right)^3}}\times \qquad (58)$$
$$\times\operatorname{th}(\kappa a)\sqrt{|\varepsilon|+\cos^2\theta};$$

для симметричных волн –

$$\left|X^+(\cos\theta)\right|^2 = \frac{(q+\cos\theta)^2|\varepsilon|}{\left(|\varepsilon|-1\right)q^2}\times$$
$$\times\frac{\sqrt{|\varepsilon|\left[1+\left(\kappa a^2\right)\right]}}{\sqrt{\left(|\varepsilon|+\cos^2\theta\right)}}\times \qquad (59)$$
$$\times\operatorname{cth}(\kappa a)\sqrt{|\varepsilon|+\cos^2\theta}.$$

Вычислим $\dfrac{X^+(q)}{X^-(-q)}$.

1. В случае $\kappa a\sqrt{|\varepsilon|}>>1$ имеем:

а) при $\kappa a>>1$, $|\varepsilon|\approx 1$

$$X_1^+(x)=\frac{x+i\sqrt{|\varepsilon|}}{x+q_0}X^+(x);$$
$$X_1^-(x)=\frac{x-q_0}{x-i\sqrt{|\varepsilon|}}X^-(x); \qquad (60)$$
$$G_1(x)=\frac{\left(|\varepsilon|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{|\varepsilon|+x^2}\right)\sqrt{x^2+|\varepsilon|}}{\left(|\varepsilon|-1\right)\left(x^2-q_0^2\right)}.$$

Решение задачи $X_1^+(x)=G_1(x)X_1^-(x)$ имеет вид

$$X_1^+(q_0)=\exp\left\{\frac{1}{2}\ln G_1(q_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi i}V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln G_1(x)}{x-q_0}dx\right\};$$
$$X_1^-(q_0)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\ln G_1(q_0)+\right. \qquad (61)$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi i}V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln G_1(x)}{x-q_0}dx\right\}.$$

Поскольку функция $G_1(x)$ четная, интегрирование в бесконечных пределах можно заменить интегралом от нуля до бесконечности. Имеет смысл искать отношение $\dfrac{X^+(q)}{X^-(-q)}$, вычисляя интеграл в выражениях (61) аналогично (51). Получаем

$$\frac{X^+(q)}{X^-(-q)}=$$
$$=\tilde{A}\frac{\sqrt{|\varepsilon|+q_0^2}}{2\left(|\varepsilon|-1\right)}\exp\left\{\frac{2}{\pi q_0}\operatorname{arctg}\sqrt{|\varepsilon|}-i\frac{\ln\left(1+|\varepsilon|\right)}{\pi q_0}\right\}, \qquad (62)$$

где $\tilde{A}=\left(\dfrac{|\varepsilon|}{f}-\dfrac{1}{\mu}\right)\Big|_{q_0}=2\sqrt{\left(|\varepsilon|-1\right)^3}$.

И, наконец,

$$\frac{X^+(q)}{X^-(-q)}=\frac{2q_0\tilde{A}\sqrt{|\varepsilon|+xq_0^2}}{\left(q_0+i\sqrt{|\varepsilon|}\right)^2\left(|\varepsilon|-1\right)}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{2}{\pi q_0}\operatorname{arctg}\sqrt{|\varepsilon|}-i\frac{\ln\left(1+|\varepsilon|\right)}{\pi q_0}\right\}. \qquad (63)$$

б) При $|\varepsilon|>>1$, $\kappa a\approx 1$ и более, $q_0\approx 1$; поэтому не будет большой ошибкой замена

$$\frac{X^+(q_0)}{X^-(-q_0)}=\frac{X^+(1)}{X^-(-1)}=$$
$$=\exp\left\{\ln G(1)+\frac{2}{\pi i}V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln G(x)}{x^2-1}dx\right\}. \qquad (64)$$

Интегрируя, получим следующий результат:

$$\frac{X^+(q_0)}{X^-(-q_0)}=\frac{2}{|\varepsilon|}\exp\left\{-\frac{1}{|\varepsilon|}-\frac{2}{|\varepsilon|\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{|\varepsilon|}\right\}. \qquad (65)$$

Считая $|\varepsilon|>>1$, находим

$$\left|\frac{X^+(q_0)}{X^-(-q_0)}\right|=\frac{2}{|\varepsilon|}\exp\left\{-\frac{2}{|\varepsilon|}\right\}, \qquad (66)$$

а фаза равна

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}} - \frac{2q_0}{\pi\sqrt{|\varepsilon|}} \approx \frac{\pi}{2}.$$

2. Случай $|\varepsilon| \approx 1$, $\kappa a \le 1$.

Для этого случая, используя факторизацию вида (54) и (55), вычисляем функции $X_1^+(q)$ и $X_1^-(-q)$. При вычислении интегралов основной реальный вклад дает вычет в точке q. В результате имеем:

для несимметричных волн –

$$\frac{X^+(q)}{X^-(-q)} = \frac{-i|\varepsilon|\sqrt{q^2+|\varepsilon|}A_{\text{несим}}}{2(|\varepsilon|-1)}\exp\left\{i\frac{2}{\pi q}\ln B_{\text{несим}}\right\}; \quad (67)$$

для симметричных –

$$\frac{X_1^+(q)}{X_1^-(-q)} = \frac{-i|\varepsilon|\sqrt{q^2+|\varepsilon|}A_{\text{сим}}}{2(|\varepsilon|-1)}\exp\left\{i\frac{2}{\pi q}\ln B_{\text{сим}}\right\}; \quad (68)$$

здесь введены обозначения

$$A_{\text{несим}} \equiv A(q_H),\ A_{\text{сим}} \equiv A(q_C);$$

$$A = \frac{1}{f} - \frac{\kappa a}{|\varepsilon|} - \frac{f}{\mu^2} + \frac{\kappa a|\varepsilon| f^2}{\mu^2};$$

$$B_{\text{несим}} = \frac{\sqrt{1+|\varepsilon|^2(\kappa a)^2}}{q^2\kappa a(|\varepsilon|-1)}; \quad (69)$$

$$B_{\text{сим}} = \frac{|\varepsilon|\sqrt{|\varepsilon|(1+\kappa^2 a^2)}}{q^2(|\varepsilon|-1)}.$$

Подставляя (69) в отношение $\frac{X^+(q)}{X^-(-q)}$, получим следующие равенства:

для несимметричных волн –

$$\frac{X^+(q)}{X^-(-q)} = \frac{|\varepsilon|(2q)^2 A_{\text{несим}}\operatorname{th}(\kappa a)\sqrt{q^2+|\varepsilon|}}{2(|\varepsilon|-1)\sqrt{q^2+|\varepsilon|}} \times \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi q}\ln B_{\text{несим}}\right)\right]; \quad (70)$$

для симметричных –

$$\frac{X^+(q)}{X^-(-q)} = \frac{|\varepsilon|(2q)^2 A_{\text{сим}}\operatorname{cth}(\kappa a)\sqrt{q^2+|\varepsilon|}}{2(|\varepsilon|-1)\sqrt{q^2+|\varepsilon|}} \times \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi q}\ln B_{\text{сим}}\right)\right]. \quad (71)$$

Коэффициент отражения электромагнитных волн от неоднородности плазменного волновода

Получим формулы для коэффициента отражения R для случаев «тонкого» и «широкого» волноводов. Для этого подставим в формулу (40) найденные отношения $\frac{X^+(q)}{X^-(-q)}$ для каждого рассмотренного случая.

Введем безразмерную величину (переменную) $t = \frac{\gamma}{\kappa}$, получим выражение

$$R = \frac{i(t-1)(|\varepsilon|-1)X^+(t)}{2t^2 AX^-(-t)}. \quad (72)$$

Положим $R = |R|e^{i\psi}$, где $|R|$ – модуль, а ψ – фаза коэффициента отражения. Тогда искомые формулы принимают следующий вид:

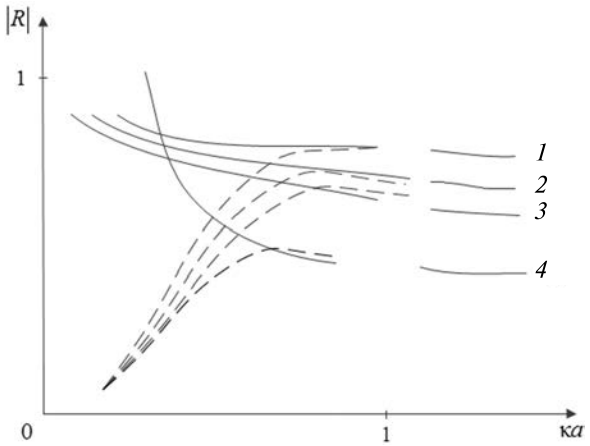


Рис. 5. Зависимости коэффициента отражения симметричных (пунктир) и несимметричных (сплошные линии) электромагнитных волн от электрических размеров волновода при различных значениях $|\varepsilon|$: 1,1(*1*) ; 1,2(*2*) ; 1,5(*3*); 2,0(*4*)

1. Случай $\kappa a\sqrt{|\varepsilon|} >> 1$.

При $\kappa a >> 1$, $|\varepsilon| \approx 1$

$$|R| = \left(\sqrt{|\varepsilon|} - \sqrt{|\varepsilon|-1}\right)\exp\left[\frac{\sqrt{|\varepsilon|-1}}{2\sqrt{|\varepsilon|}}\right];$$
$$\psi = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{|\varepsilon|-1} - \frac{\sqrt{|\varepsilon|-1}}{2\sqrt{|\varepsilon|}}\ln 2|\varepsilon|; \quad (73)$$

при $\kappa a \geq 1$, $|\varepsilon| >> 1$

$$|R| = \frac{\sqrt{|\varepsilon|} - \sqrt{|\varepsilon|-1}}{|\varepsilon|}\exp\left[\frac{-2}{|\varepsilon|}\right];$$
$$\psi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}} - \frac{2}{\pi\sqrt{|\varepsilon|-1}}. \quad (74)$$

2. Случай $\kappa a \leq 1$, $|\varepsilon| \approx 1$.

Для несимметричных волн –

$$|R| = \frac{\sqrt{|\varepsilon|}(t-1)}{\sqrt{t^2+|\varepsilon|}}\operatorname{th}(\kappa a)\sqrt{t^2+|\varepsilon|};$$
$$\psi = -\frac{5}{4}\pi + \frac{2}{\pi t}\ln B_{\text{несим}}; \quad (75)$$

для симметричных –

$$|R| = \frac{\sqrt{|\varepsilon|}(t-1)}{\sqrt{t^2+|\varepsilon|}}\operatorname{cth}(\kappa a)\sqrt{t^2+|\varepsilon|};$$
$$\psi = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi t}\ln B_{\text{сим}}. \quad (76)$$

Графики для коэффициента отражения $|R|$ при различных значениях $|\varepsilon|$ и κa представляют результаты расчетов и приведены на рис. 5.

При $\kappa a\sqrt{|\varepsilon|} >> 1$ плазма ведет себя как металл с плохой проводимостью. Волна вытесняется из нее, и коэффициент отражения не зависит от толщины волновода.

При $\kappa a\sqrt{|\varepsilon|} << 1$ излучение дипольное, поэтому коэффициент отражения чувствителен к различному типу волн.

Диаграмма направленности

Используя формулу (34) и найденное значение $\left|X^+(\cos\theta)\right|^2$, записываем окончательное значение для диаграммы направленности.

1. Случай $\kappa a \leq 1$, $|\varepsilon| \approx 1$.

Для симметричных волн –

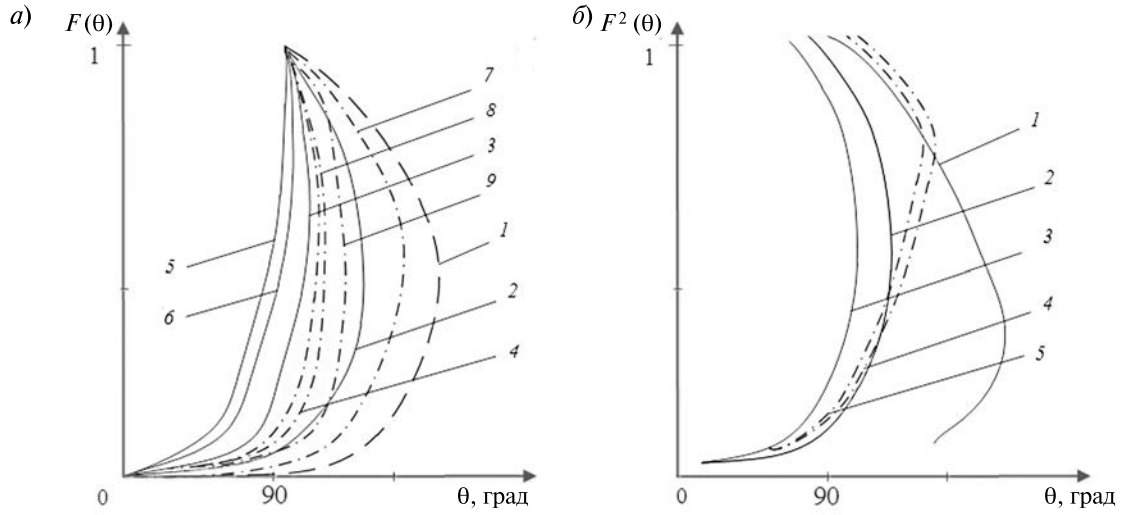


Рис. 6. Диаграммы направленности симметричных (пунктир и штрих-пунктир) и несимметричных (сплошные линии) электромагнитных волн для тонкого (*а*) и широкого (*б*) типов волновода при различных значениях $|\varepsilon|$ и их электрических размеров κa

Значения параметров волновода:

а – $|\varepsilon| = 2(1-4), 1{,}5(4, 7-9), 1{,}1-1{,}5(5)$; $\kappa a = 0{,}1(1), 0{,}3(7), 0{,}6(2), 1{,}0(3), >> 1(4), 0{,}3-1{,}1(5), 1{,}1(8)$;

б – $|\varepsilon| = 1{,}2(1-3), 1{,}1(4, 5)$, $\kappa a = 0{,}1(1), 0{,}6(2), 0{,}7(4), 1{,}0(3, 5)$

$$F^2(\theta)=\frac{|\varepsilon|^3\sin^2\theta}{(|\varepsilon|-1)t^2}\cdot\frac{\sqrt{1+(\kappa a)^2}}{(1+\cos\theta)}\times \times\frac{\mathrm{th}(\kappa a)\sqrt{|\varepsilon|}}{\left[|\varepsilon|\sin^2\theta+\mathrm{th}^2(\kappa a)\sqrt{|\varepsilon|}\right]}; \quad (77)$$

для несимметричных –

$$F^2(\theta)=\frac{|\varepsilon|\sin^2\theta}{\kappa a(|\varepsilon|-1)t^2}\cdot\frac{\sqrt{1+(|\varepsilon|\kappa a)^2}}{(1+\cos\theta)}\times \times\frac{\mathrm{cth}^2(\kappa a)\sqrt{|\varepsilon|}}{\left[|\varepsilon|\sin^2\theta+\mathrm{cth}^2(\kappa a)\sqrt{|\varepsilon|}\right]}. \quad (78)$$

2. Случай $\kappa a\sqrt{|\varepsilon|}>>1,\ |\varepsilon|\approx 1$.
При $|\varepsilon|\approx 1,\ \kappa a>>1$

$$F^2(\theta)=\sin^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{|\varepsilon|\sqrt{1+|\varepsilon|\sin^2\theta}}e^{-0,5\cos\theta}; \quad (79)$$

при $|\varepsilon|>>1,\ \kappa a\geq 1$

$$F^2(\theta)=\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{|\varepsilon|\sqrt{1+|\varepsilon|\sin^2\theta}}. \quad (80)$$

Результаты расчетов величины $F^2(\theta)$ при различных $|\varepsilon|$ и κa приведены на рис. 6.

Диаграмма направленности не имеет резко выраженных максимумов, лепесток широкий и направлен перпендикулярно к плазменному слою.

Таким образом, методом Винера – Хопфа решена задача рассеяния электромагнитных волн на неоднородности плазменного волновода. Полученное решение позволяет построить диаграммы направленности рассеянного поля для основной гармоники и высших типов волн, а также оценить коэффициент отражения в широком диапазоне изменения параметров плазменного волновода. Данная методика может быть использована при разработке диагностических устройств для измерения электродинамических характеристик плазмы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вайнштейн, Л.А.** Электромагнитные волны [Текст] / Л.А. Вайнштейн. – М.: Советское радио, 1989. – 440 с.

2. **Рапопорт, И.М.** Об одном классе сингулярных интегральных уравнений [Текст] / И.М. Рапопорт // ДАН СССР. – 1948. – Т. 59. – № 8. – С. 1403–1406.

3. **Мусхелишвили, Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Физматлит, 1962. – 600 с.

4. **Лаврентьев, М.А.** Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1965. – 749 с.

5. **Шубарин, Ю.В.** Антенны СВЧ [Текст] / Ю.В. Шубарин. – Харьков: Изд-во Харьковского гос. ун-та, 1960. – 284 с.

6. **Нобл, Б.В.** Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / Б.В. Нобл. –М.: Изд-во ИЛ, 1962. – 280 с.

7. **Федорюк, М.В.** Метод перевала [Текст] / М.В. Федорюк. – М.: Физматлит, 1977. – 386 с.

8. **Гахов, Ф.Д.** Краевые задачи [Текст] / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

УДК 537.86

А.С. Черепанов

ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ДИПОЛЕМ

В работе [1] описана новая антенна – интегральная фазированная решетка (ИФАР). В этой антенной системе излучающим элементом является полуволновой диполь, лежащий на поверхности диэлектрика. Вопросы исследования излучения такого диполя в связи с этим

оказываются весьма важными для понимания работы ИФАР.

Рассчитать излучение полуволнового диполя, лежащего на поверхности диэлектрика, несложно, если известно излучение элементарного диполя (диполя бесконечно малой длины) на поверхности диэлектрика. Тогда излучения полуволнового диполя, а также линии любого размера с любым заданным распределением тока на ней могут быть найдены путем интегрирования. Имеющиеся скудные литературные данные (см. работы [2–5] и др.) весьма противоречивы и, следовательно, в большинстве своем сомнительны. Заметным вкладом в решение этой задачи является работа [6], где детально рассмотрено излучение пространственных волн из несимметричной полосковой линии.

Кроме пространственных волн, полуволновой диполь на поверхности диэлектрика излучает поверхностные волны. С точки зрения ИФАР этот эффект вреден, так как снижает кпд антенны; для полосковой линии он приводит к дополнительным потерям, а также к взаимной связи близко расположенных линий, что может привести к обострению проблемы электромагнитной совместимости. Для решения задачи излучения поверхностных волн током с произвольным распределением вопрос об излучении поверхностных волн элементарным диполем является ключевым.

В данной работе приведено решение задачи об излучении поверхностных волн элементарным диполем. Оно открывает путь для решения задачи об излучении поверхностных волн диполем ИФАР (этот вопрос до настоящего времени не изучен), а также об излучении из несимметричной полосковой линии, о взаимной связи полосковых линий через поверхностные волны.

Поверхностные цилиндрические волны

Рассмотрим диэлектрическую пластину толщиной d с диэлектрической проницаемостью ε, возбуждаемую нитью тока, перпендикулярной пластине. Будем исследовать распространение цилиндрических поверхностных волн, возбуждаемых нитью электрического тока j_z (рис. 1).

Воспользуемся методом векторного потенциала:

$$\Delta A_z + k^2 A_z = \frac{4\pi}{c} j_z \text{ для } z \ge d \qquad (1)$$

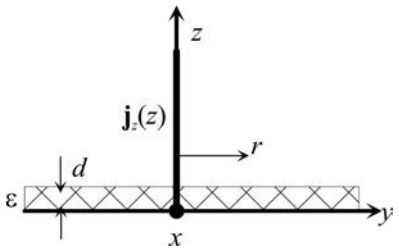


Рис. 1. Постановка задачи

и

$$\Delta A_z + k^2 \varepsilon A_z = \frac{4\pi}{c} j_z \text{ для } z < d; \qquad (2)$$

$$\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A},\ \mathbf{E} = \frac{1}{jk}\text{rot rot}\mathbf{A} = \frac{1}{jk}(\text{grad div}\mathbf{A} + k^2\mathbf{A})$$

для $z \ge d$

и

$$\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A};\ \mathbf{E} = \frac{1}{jk\varepsilon}\text{rot rot}\mathbf{A} =$$

$$= \frac{1}{jk\varepsilon}(\text{grad div}\mathbf{A} + k^2\varepsilon\mathbf{A}) \text{ для } z < d,$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ – волновое число пустого пространства (c – скорость света, ω – круговая частота).

При наличии только компоненты A_z у векторного потенциала и отсутствии азимутальной зависимости у полей (аксиальная симметрия) у решения будут только компоненты поля H_φ, E_r, E_z:

$$H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r},\ E_r = -\frac{1}{jk}\frac{\partial^2 A_z}{\partial r \cdot \partial z},$$

$$E_z = -\frac{1}{jk}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z\right) = -\frac{1}{jk}\beta^2 A_z,\ z \ge d \quad (3)$$

$$E_r = -\frac{1}{jk\varepsilon}\frac{\partial^2 A_z}{\partial r \cdot \partial z},$$

$$E_z = -\frac{1}{jk\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2\varepsilon A_z\right) = -\frac{1}{jk\varepsilon}\beta^2 A_z,\ z < d. \quad (4)$$

Решаем уравнения (1) и (2) в цилиндрической системе координат. При $r > 0$ это будут однородные дифференциальные уравнения,

которые можно решить методом разделения переменных. Это решение известно:

$$A_z'(r,z) = CH_0^{(2)}(\beta r)e^{-\nu_0 z}, \quad z \ge d,$$

$$\nu_0 = \sqrt{\beta^2 - k^2}; \qquad (5)$$

$$A_z''(r,z) = BH_0^{(2)}(\beta r)\cos(\nu z), \quad z < d,$$

$$\nu = \sqrt{k^2\varepsilon - \beta^2}, \qquad (6)$$

где C, B – произвольные постоянные, $H_0^{(2)}$ – функция Ханкеля второго рода.

Член с функциями Ханкеля первого рода отброшен как нефизический (экспоненциально возрастающая цилиндрическая волна). Граничные условия на металлическом экране ($z = 0$) и при $z = \infty$ в выражениях (5) и (6) уже учтены.

Постоянные C и B могут быть найдены из условий на границе диэлектрик – воздух.

Условие непрерывности для H_φ:

$$CH_1^{(2)}(\beta r)e^{-\nu_0 d} = BH_1^{(2)}(\beta r)\cos(\nu d); \qquad (7)$$

условие непрерывности для E_r:

$$-C\nu_0 H_1^{(2)}(\beta r)e^{-\nu_0 d} = -\frac{1}{\varepsilon}BH_1^{(2)}(\beta r)\nu\sin(\nu d); \quad (8)$$

выражения (5) и (6) совместны, если

$$\nu\frac{\sin(\nu d)}{\cos(\nu d)} - \varepsilon\nu_0 = 0.$$

Уравнение аналогично дисперсионному уравнению для плоских неоднородных поверхностных E-волн [7].

Пусть для удобства $C = 1$. Тогда

$$A_z'(r,z) = H_0^{(2)}(\beta r)e^{-\nu_0 z}, \quad z \ge d,$$

$$\nu_0 = \sqrt{\beta^2 - k^2}; \qquad (9)$$

$$A_z''(r,z) = \frac{e^{-\nu_0 d}}{\cos\nu d}H_0^{(2)}(\beta r)\cos(\nu z), \quad z < d, \quad (10)$$

где $\nu = \sqrt{k^2\varepsilon - \beta^2}$.

Вычислим компоненты поля, поперечные направлению распространения E_z, H_φ при больших r:

$$E_z = -\frac{1}{jk}\beta^2 H_0^{(2)}(\beta r)e^{-\nu_0 z} \approx$$
$$\approx -\frac{1}{jk}\beta^2\sqrt{\frac{2}{\pi\beta r}}e^{-j\left(\beta r - \frac{\pi}{4}\right)}e^{-\nu_0 z}; \qquad (11)$$

$$H_\varphi = -\beta H_1^{(2)}(\beta r)e^{-\nu_0 z} \approx$$
$$\approx -\beta\sqrt{\frac{2}{\pi\beta r}}e^{-j\left(\beta r - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}e^{-\nu_0 z} = \qquad (12)$$
$$= -j\beta\sqrt{\frac{2}{\pi\beta r}}e^{-j\left(\beta r - \frac{\pi}{4}\right)}e^{-\nu_0 z}.$$

Формулы справедливы при $z \ge d$. При $z < d$ получим:

$$E_z \approx -\frac{1}{jk\varepsilon}\beta^2\sqrt{\frac{2}{\pi\beta r}}e^{-j\left(\beta r - \frac{\pi}{4}\right)}\cos(\nu z); \qquad (13)$$

$$H_\varphi \approx -j\beta\sqrt{\frac{2}{\pi\beta r}}e^{-j\left(\beta r - \frac{\pi}{4}\right)}\cos(\nu z). \qquad (14)$$

При $\varepsilon \to 1$ $\nu_0 = \nu = 0$, $\beta = k$, и мы получаем обычную цилиндрическую волну, где E_z, H_φ равны по модулю.

Возьмем уравнение Максвелла:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = jk\varepsilon\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

умножим обе части на вектор **ds** и проинтегрируем его по площади окружности малого радиуса a на расстоянии z от металлического экрана (рис. 2). Получим следующее равенство:

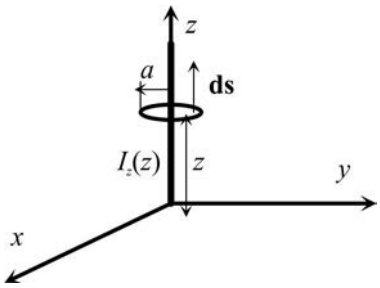


Рис. 2. Нить тока $I_z(z)$, возбуждающая поверхностную волну: **ds** – вектор, a – радиус круга (площади интегрирования), z – расстояние от металлического экрана

$$\int_s \mathrm{rot}\mathbf{H}d\mathbf{s} = jk\varepsilon \int_s E_z ds + \frac{4\pi}{c} \int_s \mathbf{j}d\mathbf{s}\,.$$

При $a \to 0$ последний из полученных интегралов можно рассматривать как некий ток $I_z(z)$, который возбуждает цилиндрическую поверхностную волну. Первый интеграл в правой части уравнения равен нулю, поскольку по теореме о среднем он равен

$$\frac{\beta^2}{jk} H_0^{(1)}(\beta r) e^{-\nu_0 z} \pi a^2,$$

где $r \in (0,a)$, а эта величина стремится к нулю при $a \to 0$, так как функция Ханкеля нулевого порядка имеет всего лишь логарифмическую особенность в нуле.

По теореме Стокса имеем равенство

$$\oint H_\varphi dl = \frac{4\pi}{c} I_z(z)\,,$$

или

$$2\pi a H_\varphi e^{-\nu_0 z} = \frac{4\pi}{c} I_z(z).$$

Поскольку $\frac{d}{dt} H_0^{(1)}(t) = -H_1^{(1)}(t)$, можно записать:

$$-2\pi a\beta H_1^{(1)}(\beta a) e^{-\nu_0 z} = \frac{4\pi}{c} I_z(z). \qquad (15)$$

Рассмотрим произведение $tH_1^{(1)}(t)$ при $t \to 0$. Оно стремится к конечному пределу, поскольку

$$H_1^{(2)}(t) = J_1(t) - jN_1(t) \approx j\frac{2}{\pi t}$$

при малых *t*.

Поэтому из формулы (15) при $a \to 0$ получим равенство

$$-2\pi\left(j\frac{2}{\pi}\right) e^{-\nu_0 z} = \frac{4\pi}{c} I_z(z)\,,$$

или

$$I_z(z) = -\frac{jc}{\pi} e^{-\nu_0 z}. \qquad (16)$$

Формула (16) справедлива при $z \ge d$. Проведя аналогичные выкладки для области $z < d$, получим:

$$I_z(z) = -\frac{jc}{\pi} \frac{e^{-\nu_0 d}}{\cos(\nu d)} \cos(\nu z).$$

Таким образом, ток (если изменить его условное положительное направление на противоположное) выражается как

$$I_z(z) = \begin{cases} \dfrac{jc}{\pi} e^{-\nu_0 z}, & z \ge d; \\ \dfrac{jc}{\pi} \dfrac{e^{-\nu_0 d}}{\cos(\nu d)} \cos(\nu z) & z < d; \end{cases} \qquad (17)$$

этот ток возбуждает поверхностную цилиндрическую волну (9), (10).

Возбуждение поверхностных волн элементарным диполем

Поместим элементарный диполь длиной *l* с током *I* на диэлектрик в точку с координатами (0,0,*d*), ориентировав его по оси *y* (рис. 3)

Применим к данной системе теорему взаимности:

$$\int_{V_1} \mathbf{j}_1 \mathbf{E}_2 dV = \int_{V_2} \mathbf{j}_2 \mathbf{E}_1 dV,$$

где V_1, V_2 – объемы, занимаемые токами $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$ соответственно; $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ – поля, создаваемые токами $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$.

Для токов и полей на рис. 3 имеем равенство

$$\int_0^\infty E_z^0(z) I_z(z) dz = IlE_{y'} \cos\alpha\,. \qquad (18)$$

В интеграле слева выполнено интегрирование по бесконечно малому поперечному сечению тока $\mathbf{j}_1$, получен ток $I_z(z)$; в интеграле справа выполнено интегрирование по бесконечно малому цилиндру, занимаемому током $\mathbf{j}_2$.

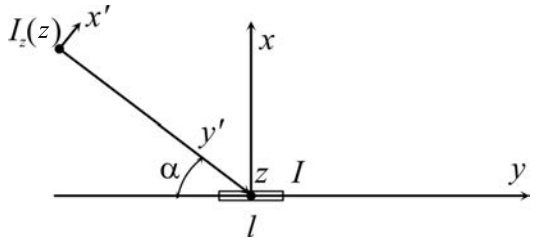


Рис. 3. Нить тока $I_z(z)$ и элементарный диполь длиной *l*, к которым применяется теорема взаимности; x', y', α – подвижная система координат

$E_{y'}$ – радиальная компонента электрического поля поверхностной волны в месте расположения элементарного диполя:

$$E_{y'} = -\frac{1}{jk}\beta\nu_0 H_1^{(1)}(\beta r)e^{-\nu_0 d},$$

где r – расстояние между элементарным диполем и током $I_z(z)$.

Поле $E_z^0(z)$ есть поле поверхностной цилиндрической волны, возбуждаемой диполем в области, где отличен от нуля ток $I_z(z)$. Это поле выражается формулами (11) и (13), и в нашем случае может быть записано в следующем виде:

$$E_z^0(z) = \begin{cases} -\frac{A}{jk}\beta^2 H_0^{(1)}(\beta r)e^{-\nu_0 z}, & z \ge d; \\ -\frac{A}{jk\varepsilon}\beta^2 \frac{e^{-\nu_0 d}}{\cos(\nu d)} H_0^{(1)}(\beta r)\cos(\nu z), & z < d, \end{cases} \quad (19)$$

где A – неизвестная амплитуда, которую, собственно, и нужно найти.

Проведем вычисления по формуле (12):

$$\int_0^d -\frac{A}{jk\varepsilon}\beta^2 \frac{e^{-\nu_0 d}}{\cos(\nu d)} H_0^{(1)}(\beta r)\cos(\nu z)\frac{jc}{\pi}\frac{e^{-\nu_0 d}}{\cos(\nu d)}\times$$

$$\times\cos(\nu z)dz + \int_d^\infty -\frac{A}{jk}\beta^2 H_0^{(1)}(\beta r)e^{-\nu_0 z}\frac{jc}{\pi}e^{-\nu_0 z}dz =$$

$$= Il\left(-\frac{1}{jk}\beta\nu_0 H_1^{(1)}(\beta r)e^{-\nu_0 d}\right)\cos\alpha,$$

или

$$\frac{A}{\varepsilon}\beta\frac{e^{-\nu_0 d}}{\cos(\nu d)}H_0^{(1)}(\beta r)\frac{jc}{\pi}\frac{e^{-\nu_0 d}}{\cos(\nu d)}\int_0^d \cos^2(\nu z)dz +$$

$$+A\beta H_0^{(1)}(\beta r)\frac{jc}{\pi}\int_d^\infty e^{-2\nu_0 z}dz =$$

$$= Il\left(\nu_0 H_1^{(1)}(\beta r)e^{-\nu_0 d}\right)\cos\alpha.$$

Выполним интегрирование

$$\frac{A}{\varepsilon}\beta\frac{e^{-\nu_0 d}}{\cos(\nu d)}H_0^{(1)}(\beta r)\frac{jc}{\pi}\frac{e^{-\nu_0 d}}{\cos(\nu d)}\times$$

$$\times d\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin(2\nu d)}{4\nu d}\right)+$$

$$+A\beta H_0^{(1)}(\beta r)\frac{jc}{\pi}\frac{e^{-2\nu_0 d}}{2\nu_0} = \quad (20)$$

$$= Il\left(\nu_0 H_1^{(1)}(\beta r)e^{-\nu_0 d}\right)\cos\alpha.$$

Учитывая, что пробный ток и элементарный диполь расположены достаточно далеко друг от друга, заменим функции Ханкеля их асимптотиками:

$$H_0^{(1)}(\beta r) = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta r}}e^{-j\left(\beta r-\frac{\pi}{4}\right)};$$

$$H_1^{(1)}(\beta r) = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta r}}e^{-j\left(\beta r-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Это даст возможность упростить равенство (20):

$$\frac{A}{\varepsilon}\beta\frac{e^{-\nu_0 d}}{\cos(\nu d)}\frac{jc}{\pi}\frac{e^{-\nu_0 d}}{\cos(\nu d)}d\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin(2\nu d)}{4\nu d}\right)+$$

$$+A\beta\frac{jc}{\pi}\frac{e^{-2\nu_0 d}}{2\nu_0} = Il\left(\nu_0 e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-\nu_0 d}\right)\cos\alpha,$$

или

$$\frac{A}{\varepsilon}\beta\frac{e^{-\nu_0 d}}{\cos(\nu d)}\frac{c}{\pi}\frac{e^{-\nu_0 d}}{\cos(\nu d)}d\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin(2\nu d)}{4\nu d}\right)+$$

$$+A\beta\frac{c}{\pi}\frac{e^{-2\nu_0 d}}{2\nu_0} = Il\left(\nu_0 e^{-\nu_0 d}\right)\cos\alpha.$$

После некоторых упрощений имеем равенство

$$A\beta\frac{c}{\pi}\frac{1}{\varepsilon}\frac{e^{-2\nu_0 d}}{\cos^2(\nu d)}d\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin(2\nu d)}{4\nu d}\right)+$$

$$+A\beta\frac{c}{\pi}\frac{e^{-2\nu_0 d}}{2\nu_0} = Il\left(\nu_0 e^{-\nu_0 d}\right)\cos\alpha.$$

Отсюда находим A:

$$A = \frac{\pi}{\beta c}\frac{Il\nu_0 e^{\nu_0 d}\cos\alpha}{\frac{1}{\varepsilon\cos^2(\nu d)}d\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin(2\nu d)}{4\nu d}\right)+\frac{1}{2\nu_0}}. \quad (21)$$

Интересно отметить, что диполь имеет максимум излучения поверхностной волны вдоль своей оси и не излучает в перпендикулярном направлении (рис. 4), в отличие от диполя в

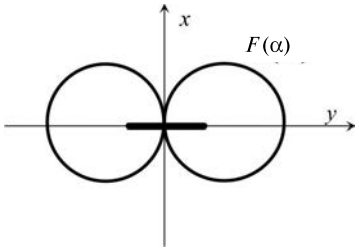


Рис. 4. Диаграмма направленности $F(\alpha)$ излучения поверхностных волн диполем

свободном пространстве. Здесь, кроме того, диаграмма направленности рассматривается только в плоскости xy.

Вычислим мощность, излучаемую диполем. Вектор Пойнтинга выражается как

$$S = \frac{c}{4\pi} E_z H_\varphi = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{A}{k} \beta^2 \sqrt{\frac{2}{\pi\beta r}} e^{-\nu_0 z} \times$$
$$\times A\beta \sqrt{\frac{2}{\pi\beta r}} e^{-\nu_0 z} = \frac{c}{4\pi} A^2 \frac{\beta^2}{k} \frac{2}{\pi r} e^{-2\nu_0 z}.$$

Формула справедлива при $z \geq d$; при $z < d$ будет справедливым выражение

$$S = \frac{c}{4\pi} A^2 \frac{\beta^2}{k\varepsilon} \frac{2}{\pi r} \cos^2(\nu z).$$

Чтобы вычислить мощность, нужно проинтегрировать вектор Пойнтинга по поверхности цилиндра большого радиуса с осью, совпадающей с осью z:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} S r d\alpha dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{d} \frac{c}{4\pi} A^2 \frac{\beta^2}{k} \frac{2}{\pi r} \left(\frac{1}{\varepsilon} \cos^2(\nu z) \right) \times$$
$$\times r d\alpha dz + \int_0^{2\pi} \int_d^{\infty} \frac{c}{4\pi} A^2 \frac{\beta^2}{k} \frac{2}{\pi r} \left(e^{-2\nu_0 z} \right) r d\alpha dz =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{c}{4\pi} \left[\frac{\pi}{\beta c} \frac{Il\nu_0 e^{\nu_0 d} \cos\alpha}{\frac{1}{\varepsilon\cos^2(\nu d)} d \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\nu d)}{4\nu d} \right) + \frac{1}{2\nu_0}} \right]^2 \times$$
$$\times \frac{\beta^2}{k} \frac{2}{\pi r} r d\alpha \int_0^{d} \frac{1}{\varepsilon} \cos^2(\nu z) dz + \int_d^{\infty} e^{-2\nu_0 z} dz =$$
$$= \frac{c}{4\pi} \frac{\pi^2}{\beta^2 c^2} \frac{\beta^2}{k} \frac{2}{\pi} (Il\nu_0)^2 \frac{1}{M^2} e^{2\nu_0 d} \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha d\alpha \left(\int_d^{\infty} \left(e^{-2\nu_0 z} \right) dz + \int_0^{d} \frac{1}{\varepsilon} \cos^2(\nu z) dz \right) =$$
$$= \frac{(Il)^2}{2c} \frac{(\nu_0)^2}{k} \frac{1}{M^2} e^{2\nu_0 d} \pi \left[\frac{1}{2\nu_0} + \frac{1}{\varepsilon} d \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\nu d)}{4\nu d} \right) \right],$$

где $M = \frac{1}{\varepsilon\cos^2(\nu d)} d \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\nu d)}{4\nu d} \right) + \frac{1}{2\nu_0}.$

Поскольку сопротивление излучения диполя в свободном пространстве выражается как

$$R_{\text{изл}} = \frac{2}{3} \frac{(kl)^2}{c},$$

то можно записать:

$$P = \frac{2}{3} \frac{(kl)^2}{c} \frac{3}{2} \frac{(\nu_0)^2}{k^3} \frac{1}{M^2} e^{2\nu_0 d} \pi \left[\frac{1}{2\nu_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\varepsilon} d \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\nu d)}{4\nu d} \right) \right] \frac{I^2}{2},$$

то есть

$$R_{\text{цил}} = R_{\text{изл}} \frac{3}{2} \frac{(\nu_0)^2}{k^3} \times$$
$$\times \frac{\left[\frac{1}{2\nu_0} + \frac{1}{\varepsilon} d \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\nu d)}{4\nu d} \right) \right]}{\left[\frac{1}{\varepsilon\cos^2(\nu d)} d \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\nu d)}{4\nu d} \right) + \frac{1}{2\nu_0} \right]^2} e^{2\nu_0 d} \pi,$$

или

$$R_{\text{цил}} = R_{\text{изл}} \frac{3}{2} \frac{(\nu_0 d)^2}{(kd)^3} e^{2\nu_0 d} \times$$
$$\times \pi \frac{\left[\frac{1}{2\nu_0 d} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\nu d)}{4\nu d} \right) \right]}{\left[\frac{1}{2\nu_0 d} + \frac{1}{\varepsilon\cos^2(\nu d)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\nu d)}{4\nu d} \right) \right]^2}.$$

Окончательно имеем формулу

$$R_{\text{цил}} = R_{\text{изл}} Z(kd, \varepsilon), \qquad (22)$$

где

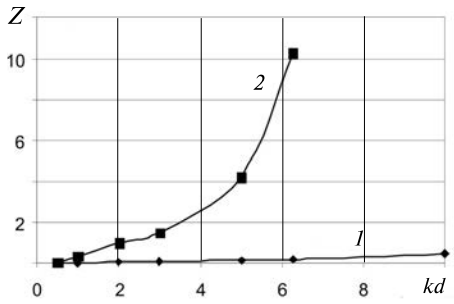


Рис. 5. Зависимость коэффициента $Z(kd, \varepsilon)$ от электрической толщины диэлектрика при двух значениях диэлектрической проницаемости ε: 1,1 (*1*) и 1,5 (*2*)

$$Z(kd,\varepsilon)=\frac{3}{2}\frac{\left(\nu_0 d\right)^2}{\left(kd\right)^3}e^{2\nu_0 d}\times$$
$$\times\pi\frac{\left[\dfrac{1}{2\nu_0 d}+\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin(2\nu d)}{4\nu d}\right)\right]}{\left[\dfrac{1}{2\nu_0 d}+\dfrac{1}{\varepsilon\cos^2(\nu d)}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin(2\nu d)}{4\nu d}\right)\right]^2}. \qquad (23)$$

Безразмерный коэффициент $Z(kd,\varepsilon)$ характеризует сравнительную эффективность возбуждения пространственных и поверхностных волн диполем. При $Z(kd,\varepsilon)>1$ при одинаковом токе в диполе мощность, уносимая поверхностными волнами, больше, чем мощность, излучаемая диполем в свободном пространстве. На рис. 5 приведена зависимость $Z(kd,\varepsilon)$ от kd для $\varepsilon=1{,}1$ и $\varepsilon=1{,}5$, Видно, что с ростом нормированной толщины диэлектрического слоя kd коэффициент $Z(kd,\varepsilon)$ резко возрастает. Это показывает, что диполь на толстой пластине с большой диэлектрической проницаемостью в основном излучает поверхностные волны, а не пространственные.

Таким образом, в настоящей работе решена задача о возбуждении поверхностных волн элементарным диполем, расположенным на слое металлизированного диэлектрика. Показано, что диполь наиболее эффективно излучает в направлении вдоль своей оси (в отличие от пространственных волн). Если электрическая толщина пластины велика, то диполь большую часть мощности излучает именно в виде поверхностных волн. Хотя в работе исследовалось возбуждение поверхностных волн лишь низшего типа, по аналогичной методике можно решить задачу в возбуждении волн любого типа. Решение данной задачи открывает путь к исследованию возможных потерь произвольной микрополосковой линии за счет возбуждения поверхностных волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zaitsev, E.F.** MM-wave integrated phased arrays with ferrite control [Текст] / E.F. Zaitsev, Yu.P. Yavon, Yu.A. Komarov [et al.] // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 1994. – Vol. 42. – No 3. – P. 304–310.

2. **Жук, М. С.** Проектирование линзовых, сканирующих, широкодиапазонных антенн и фидерных устройств [Текст] / М.С. Жук, Ю.Б. Молочков. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.

3. **Панченко, Б.А.** Микрополосковые антенны [Текст] / Б.А. Панченко, Е.И. Нефедов. – М.: Радио и связь, 1986. – 144 с.

4. **Levine, E.** Study of microstrip array antennas with the feed networks [Текст] / G. Malamud, S. Strikman, D.A. Treves // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 1989. – Vol. 37. – No. 4. – P. 426–434.

5. **Нефедов, Е.И.** Полосковые линии передачи [Текст] / Е.И. Нефедов, А.Т. Фиалковский. – М.: Наука, 1980. – 312 с.

6. **Зайцев, Э.Ф.** Излучение из несимметричной полосковой линии [Текст] / Э.Ф. Зайцев // Научные исследования и инновационная деятельность. Матер. научн.-практ. конф. – Санкт-Петербург, 18–20 июня 2007. – СПб.: Изд-во. Политехн. ун-та, 2007. – С. 375–381.

7. **Вайнштейн, Л.А.** Электромагнитные волны [Текст] / Л.А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1988. – 442 с.

ХРОНИКА

М.А. Васильева, Т.А. Гаврикова, В.И. Ильин

XIII ВСЕРОССИЙСКАЯ МОЛОДЕЖНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ФИЗИКЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВ И НАНОСТРУКТУР, ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ОПТО- И НАНОЭЛЕКТРОНИКЕ

21 – 25 ноября 2011 года в Санкт-Петербурге, в здании Академического университета РАН, прошла Тринадцатая Всероссийская молодежная конференция по физике полупроводников и наноструктур, полупроводниковой опто- и наноэлектронике. Организаторами выступили Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербургский академический университет – научно-образовательный центр нанотехнологий РАН, Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербургский государственный университет.

Опубликовано 106 докладов, которые представили 26 вузов и научных центров из 14 городов России: от Санкт-Петербурга до Владивостока [1].

В программу [2] были включены пять приглашенных докладов ведущих российских ученых.

Открыли серию приглашенных докладов сотрудники ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН Е.Л. Портной с докладом «Терагерцовая оптоэлектроника» и С.А. Тарасенко «Фотоэлектрические эффекты в графене».

С докладами также выступили доктор физ.-мат.наук из ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН А.В. Селькин («Фотонные кристаллы»), доктор физ.-мат.наук из СПб.НИУ ИТМО П.А. Белов («Передача изображений со сверхразрешением при помощи анизотропных мегаматериалов») и доктор физ.-мат. наук из ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН А.В. Иванчик («Ускоренное расширение Вселенной. Темная энергия» (по материалам Нобелевской премии по физике 2011 г.)).

На девяти пленарных заседаниях студентами и аспирантами сделано 47 устных докладов.

Стендовая сессия (50 докладов) состоялась по следующим разделам: «Объемные свойства кристаллов», «Процессы роста, поверхность, границы раздела», «Гетероструктуры, сверхрешетки, квантовые ямы», «Квантовые точки, квантовые нити и другие низкоразмерные системы», «Дефекты и примеси», «Приборы наноэлектроники», «Оптоэлектронные приборы», «Новые материалы».

Программный комитет отметил дипломами и премиями следующие работы аспирантов и студентов.

Премией (5000 руб.) имени Е.Ф. Гросса за лучшую работу в области оптики полупроводников награждены:

Абрамкин Демид Суад, аспирант ИФП СО РАН (Новосибирск), за доклад «Атомное и энергетическое строение GaAs/GaP гетероструктур»;

Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук А.Е. Жуков (Санкт-Петербургский академический университет РАН) ведет пленарное заседание конференции

Григорьев Филипп Сергеевич, студент Санкт-Петербургского государственного университета, за доклад «Нетермализованная люминесценция экситонных поляритонов в широких InGaAs/GaAs квантовых ямах».

Дипломом I степени и премией (4000 руб.) отмечен **Коренев Владимир Владимирович,** аспирант Академического университета РАН (С.-Петербург), за доклад «Модель одновременной генерации через основное и возбужденное состояния в полупроводниковых лазерах на квантовых точках».

Дипломами II степени и премиями (по 3000 руб.) награждены аспиранты:

Винниченко Максим Яковлевич (СПбГПУ), Санкт-Петербург, соавтор М.О. Машко (студент 5 курса СПбГПУ), за доклад «Динамика процессов рекомбинации и захвата носителей заряда в лазерных наноструктурах с квантовыми ямами InGaAsSb/AlGaAsSb»;

Кац Владимир Наумович (Санкт-Петербургский государственный университет) за доклад «Фотолюминесценция одиночных квантовых нитей и квантовых точек».

Дипломами III степени и премиями (по 2500 руб.) награждены аспиранты:

Попков Сергей Алексеевич (Нижегородский государственнй университет) за доклад «Исследование мелкого донорного центра лития в кремнии, обогащенном изотопом кремния -28»;

Байдакова Наталия Алексеевна (Институт физики микростурктур РАН, Нижний Новгород) за доклад «Исследование многослойных структур с Ge(Si)/Si(001) островками методами спектроскопии фотолюминесценции и спектроскопии возбуждения фотолюминесценции»;

Ельцина Ольга Сергеевна (ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург) за доклад «Влияние кислорода на люминесцентные свойства наночастиц аморфного кремния».

Дипломами награждены аспиранты:

Криштопенко Сергей Сергеевич (Институт физики микроструктур РАН, Нижний Новгород), соавтор А.В. Малыженков (студент того же института) за доклад «Эффекты электрон-электронного взаимодействия в спиновом резонансе 2*d*-электронов в гетероструктурах InAs/AlSb»;

Барановский Максим Владимирович (СПбГЭТУ, Санкт-Петербург) за доклад «Исследование фотоэлектрических свойств полупроводниковых наногетероструктур InGaN/GaN»;

Румянцев Владимир Владимирович (Институт физики микроструктур РАН, Нижний Новгород) за доклад «Спектры и кинетика терагерцовой фотопроводимости в узкозонных твердых растворах $Hg_{1-x}Cd_xTe$ ($x < 0,2$)»;

Шиляев Артём Владимирович (ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург) за доклад «Энергетический спектр и оптические переходы в наногетероструктурах CdHgTe»;

Вороненков Владислав Валерьевич (СПбГПУ), Санкт-Петербург, соавтор А.И. Цюк (аспирант СПбГПУ) за доклад «Механические напряжения в пленках нитрида галлия»;

Тропина Наталья Эдуардовна (НИИ «Гириконд», Санкт-Петербург) за доклад «Особенности энергетического спектра пленок PbSe, сформированных на кристаллических и аморфных подложках»;

Юрова Валентина Александровна (Северо-Западный государственный заочный технический университет, Санкт-Петербург) за доклад «Исследование эффекта Казимира в структуре металл – диэлектрик – полупроводник (МДП) с наноразмерной толщиной диэлектрика»;

Коновалов Глеб Георгиевич (ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург), соавтор Д.А. Старостенко (студент СПбГПУ, Санкт-Петербург) за доклад «Высокоэффективные фотодиоды для спектрального диапазона 2,5 – 4,8 мкм»;

Карпова Светлана Сергеевна (СПбГЭТУ, Санкт-Петербург) за доклад «Синтез и исследование однокомпонентных и двухкомпонентных оксидов металлов для газовых сенсоров»;

Миронова Мария Сергеевна (СПбГЭТУ, Санкт-Петербург) за доклад «Энергетический спектр и волновые функции электронов в сверхрешетках Si/SiO_2»;

Дурнев Михаил Васильевич (ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург) за доклад «Гигантское зеемановское расщепление состояний легкой дырки в квантовых ямах типа GaAs/AlGaAs».

Дипломом I степени и премией (4000 руб.) награжден студент МФТИ (Москва)

Мыльников Дмитрий Александрович за доклад «Пространственное распределение областей сильной и слабой экситон-фотонной связи в GaAs-микрорезонаторе».

Дипломами II степени и премиями (по 3000 руб.) награждены студенты:

Чесницкий Антон Васильевич (Новосибирский ГТУ) за доклад «Трехосевой датчик Холла на основе полупроводниковых оболочек»;

Туманов Дмитрий Сергеевич (СПбГПУ, Санкт-Петербург), соавтор Г.А. Мелентьев (аспирант СПбГПУ), за доклад «Дальнее ИК излучение горячих электронов в структуре GaN/AlGaN в электрическом поле».

Дипломами III степени и премиями (по 2500 руб.) награждены студенты:

Романенко Константин Олегович (Санкт-Петербургский государственный университет) за доклад «Динамическая дифракция света в фотонных кристаллах и спектроскопия брэгговского отражения света»;

Грачев Денис Александрович (Нижегородский ГУ), соавтор А.И. Бобров (студент Нижегородского ГУ), за доклад «Массивы нанокристаллов кремния в матрице SiO_2: структура и люминесцентные свойства»;

Рыжов Иван Игоревич (Санкт-Петербургский государственный университет) за доклад «Характеризация структур с квантовыми ямами методом спектроскопии резонансного экситонного отражения».

Дипломами награждены студенты:

Чегодаев Александр Дмитриевич (Санкт-Петербургский государственный университет) за доклад «Эффекты, индуцированные в спектре движущегося экситона однородным продольным магнитным полем»;

Кунделев Евгений Валерьевич (СПбГПУ, Санкт-Петербург) за доклад «Резонансные оптические свойства систем экситонов в квантовых ямах AlGaAs/GaAs/AlGaAs»;

Котова Мария Сергеевна (МГУ, Москва) за доклад «Эффект резистивного переключения в полимерных материалах и энергонезависимая память на его основе»;

Трифонов Артур Валерьевич (Санкт-Петербургский государственный университет) за доклад «Исследование спектров отражения в области экситонных поляритонов в квантовых ямах InGaAs/GaAs под углом Брюстера»;

Таланцев Артём Дмитриевич (МФТИ, Москва) за доклад «Влияние ориентации подложки GaAs на магнитное упорядочение δ-Mn-слоя и поляризацию фотолюминесценции квантовой ямы GaAs/InGaAs/GaAs в гетероструктурах InGaAs/GaAs/δ-Mn»;

Дунаев Василий Сергеевич (Нижегородский ГУ), соавторы Б.Н. Звонков, А.В. Кудрин, М.В. Дорохин (Научно-исследовательский физико-технический институт Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского), за доклад «Магниточувствительные эффекты переключения в диодных структурах с ферромагнитным слоем и квантовой ямой»;

Попов Константин Михайлович (СПбГПУ, Санкт-Петербург) за доклад «Трехкомпонентные сплавы на основе кремния, железа и кобальта, выращенные на поверхности кремния»;

Шевлягин Александр Владимирович (Дальневосточный федеральный университет, Владивосток) за доклад «Явление, механизм и способы контроля всплытия нанокристаллов β-$FeSi_2$ в процессе формирования двойных гетероструктур Si/НК-β-$FeSi_2$/Si»;

Чернышева Екатерина Андреевна (Академический университет РАН, Санкт-Петербург) за доклад «Исследование оптических свойств структур InGaN, выращенных методом ГФЭ МОС при различных давлениях в реакторе»;

Смирнов Владимир Игоревич (СПбГПУ, Санкт-Петербург), соавтор Г.А. Мелентьев (аспирант СПбГПУ), за доклад «Терагерцовое излучение свободных электронов при их разогреве электрическим полем в эпитаксиальных слоях GaN и InAs».

Десять докладов рекомендовано для участия в конкурсе по Программе «Участник молодежного научно-инновационного конкурса» («УМНИК») в номинации «Научные результаты, обладающие существенной новизной и сверхсрочной перспективой их коммерциализации» с последующим их финансированием Фондом содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере». В их числе:

Галисултанов Айрат (аспирант Академического университета РАН, Санкт-Петербург), руководитель А.В. Осетров, доктор техн. наук, профессор СПбГЭТУ, за доклад «Исследование свойств поверхностных акустических волн в структурах AlN/сапфир и ZnO/алмаз»;

Мамаев Виктор Викторович (студент СПбГПУ, Санкт-Петербург) руководители В.Г. Сидоров, доктор физ.-мат. наук, профессор СПбГПУ; А.Н. Алексеев, канд. физ.-мат. наук;

С.И. Петров, канд. физ.-мат. наук, ЗАО «НТО», С.-Петербург; Д.М. Красовицкий, канд. хим. наук; В.П. Чалый, канд. физ.-мат. наук, ЗАО «Светлана–РОСТ», за доклад «Получение слоев GaN с пониженной плотностью дислокаций методом МЛЭ»;

Асеев Павел Андреевич (студент Академического университета РАН, Санкт-Петербург), руководитель В.Н. Жмерик, канд. физ.-мат. наук, с. н. с. ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, за доклад «Получение слоев AlN с атомарно-гладкой и свободной от капель поверхностью методом молекулярно-пучковой эпитаксии с плазменной активацией»;

Зубов Федор Иванович (аспирант Академического университета РАН, Санкт-Петербург), руководитель А.Е. Жуков, доктор физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН, зав. лабораторией Академического университета РАН, за доклад «Особенности двухполосной генерации лазеров на квантовых точках»;

Золотарев Василий Владимирович (студент СПбГУ, Санкт-Петербург), руководители З.Н. Соколова, канд. физ.-мат. наук, с.н.с. ФТИ им А.Ф. Иоффе РАН; В.Ф. Агекян, доктор физ.-мат. наук, профессор СПбГУ, за доклад «Внутренние дифракционные решетки с отражением в высоком порядке для мощных полупроводниковых лазеров»;

Басалкевич Татьяна Михайловна (студентка СПбГПУ, Санкт-Петербург), соавтор Н.А. Тальнишних (студентка СПбГЭТУ, Санкт-Петербург), руководитель Н.М.Шмидт, доктор физ.-мат. наук, с. н. с. ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, за доклад «Особенности развития деградационного процесса в мощных синих InGaN/GaN светодиодах»;

Ламкин Иван Анатольевич (аспирант СПбГЭТУ, Санкт-Петербург), руководитель А.В. Соломонов, доктор физ.-мат. наук, профессор СПбГЭТУ, за доклад «Создание и исследование фотоприемников на основе барьеров Шоттки к твердым растворам AlGaN»;

Бобылев Александр Викторович (аспирант СПбГПУ, Санкт-Петербург), руководители Д.А. Фирсов, доктор физ.-мат. наук, профессор СПбГПУ; А.В. Андрианов, доктор физ.-мат. наук, в.н.с. ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, за доклад «Дифференциальная терагерцовая когерентная спектроскопия тонких пленок сопряженного полупроводникового полимера полифлюорен»;

Балагула Роман Михайлович (студент СПбГПУ, Санкт-Петербург), руководитель А.Н. Софронов, канд. физ.-мат. наук, доцент СПбГПУ, за доклад «Терагерцовое излучение в графене в сильных электрических полях»;

Петров Василий Александрович (аспирант Санкт-Петербургского академического университета, Научно-образовательного центра нанотехнологий РАН), руководитель И.П. Сошников, канд. физ.-мат. наук, с. н. с. ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, за доклад «Пьезоэлектрический эффект в структурах с нитевидными нанокристаллами GaAs».

Организаторы конференции благодарны сотрудникам Научно-образовательного комплекса «СПбФТНОЦ РАН» за создание всех условий для успешной работы конференции. Информация о следующей конференции будет помещена в сентябре 2012 г. на сайте: http://www.spbstu.ru/rphf/conf2012.html.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. 13-я Всероссийская молодежная конференция по физике полупроводников и наноструктур, полупроводниковой опто- и наноэлектронике [Текст]: Тезисы докладов. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 116 с.

2. Тринадцатая Всероссийская молодежная конференция по физике полупроводников и наноструктур, полупроводниковой опто- и наноэлектронике [Текст]: Программа конференции 21–25 ноября 2011 г. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 13 с.

А.С. Черепанов, А.А. Сочава

НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ СТУДЕНТОВ-РАДИОФИЗИКОВ РОССИИ

Очередная, пятнадцатая по счету Всероссийская научная конференция студентов-радиофизиков прошла в СПбГУ в Петродворце 6–7 декабря 2011 года [1]. В ней приняли участие более 50 студентов и аспирантов, а также преподаватели и научные сотрудники вузов Санкт-Петербурга. Уже несколько последних лет оргкомитет конференции по поручению Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере имеет право рекомендовать претендентов для участия в программе Фонда «УМНИК» («Участник молодежного научно-инновационного конкурса») по финансированию научных исследований, выполняемых молодыми учеными [2].

На конференции 2011 года было представлено 48 докладов. Участвовали следующие вузы: Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Российский государственный гидрометеорологический университет (Санкт-Петербург); из других городов России: Владимирский государственный университет, Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Казанский государственный энергетический университет, Московский институт радиотехники, электроники и автоматики, Марийский государственный технический университет, Сыктывкарский государственный университет, Южный федеральный университет. Число докладов существенно увеличилось по сравнению с 2010 годом (48 против 38), увеличилось и число вузов, приславших на конференцию своих представителей.

Финансирование конференции осуществлял физический факультет Санкт-Петербургского государственного университета. Спонсором конференция выступил Институт инженеров по электротехнике и электронике (IEEE ED/MTT/AP, Петербургское отделение).

Тематика докладов, представленных на конференции в этом году, отражает следующие направления современной радиофизики: электродинамика, акустика, вопросы распространения радиоволн в ионосфере, технология микросхем СВЧ, неразрушающая диагностика материалов и конструкций, а также ряд других.

По окончании конференции жюри, в которое вошли члены оргкомитета, подвело итоги, назвав лауреатов; но при этом не удалось определить единоличного победителя: лучшими были признаны сразу три доклада. Поэтому было решено в этом году диплом первой степени не присуждать, а отметить лучшие доклады тремя дипломами второй степени и четырьмя – третьей степени.

Лучшими были признаны следующие доклады:

Векшин Ю.В., Виноградов К.Г. (СПбГПУ, руководители – доктор физ.-мат. наук, профессор СПбГПУ А.П. Лавров; кандидат физ.-мат. наук, доцент СПбГПУ С.И. Иванов) – «Исследование стабильности отдельных каскадов радиометров с применением дисперсии Аллана» (вторая премия и диплом второй степени).

Воробьёв В.В. (СПбГУ, руководитель – доктор физ.-мат. наук, профессор А.В. Тюхтин) – «Излучение заряда, движущегося в проволочном метаматериале» (вторая премия и диплом второй степени).

Грешневиков К.В. (СПбГПУ, руководители – доктор физ.-мат. наук, профессор А.С. Черепанов; старший преподаватель Г.П. Жабко) – «Колебания тонкостенной цилиндрической оболочки при сосредоточенном аксиально-симметричном возбуждении» (вторая премия и диплом второй степени).

Канивец А.А. (СПбГУ, руководитель – кандидат физ.-мат. наук, доцент В.М. Сарнацкий) – «Размерно-резонансные эффекты при электромагнитном возбуждении ультразвуковых волн тонкими пленками железо-иттриевого граната» (третья премия и диплом третьей степени).

Корсиков Р.Н. (СПбГУ, руководитель – кандидат физ.-мат. наук, доцент В.Э. Герм) – «Исследование полного электронного содержания полярной ионосферы» (третья премия и диплом третьей степени).

Уткин А. А. (СыктГУ, руководитель – доктор физ.-мат. наук, профессор Л.Н. Котов) – «Исследование СВЧ отражения от композитных и многослойных пленок» (третья премия и диплом третьей степени).

Щелоков Ю.А. (СПбГМТУ, руководитель – доктор физ.-мат. наук, профессор Ф.Ф. Легуша) – «Поглощение энергии звуковой волны на шероховатой стенке» (третья премия и диплом третьей степени).

В этом году сразу два доклада представителей СПбГПУ стали победителями конференции.

Преподаватели, научные сотрудники и аспиранты СПбГПУ и СПбГУ приняли активное участие в работе конференции, они высоко оценили большинство представленных докладов. Лауреаты премий получили дипломы оргкомитета, каждый участник конференции получил грамоту, сборник тезисов докладов и программу конференции.

Для участия в программе «УМНИК» были рекомендованы следующие участники конференции, чьи работы были признаны удовлетворяющими критериям отбора программы (расположены в порядке убывания рейтинговой оценки):

Грешневиков К.В. (СПбГПУ) – обладатель диплома второй степени конференции;

Иванов К.О. (СПбГУТ, руководитель – кандидат техн. наук, доцент Э.Ю. Седышев) – «Соединения минимальных автономных блоков объемных интегральных схем СВЧ».

Таким образом, рекомендации получили два участника конференции, причем один из них – аспирант кафедры радиофизики радиофизического факультета СПбГПУ.

Доклады лауреатов вызвали живой интерес у участников конференции.

Работа К.В. Грешневикова посвящена исследованию звуковых волн в трубах. Акустические колебания используются, в частности, в системах интроскопии, которые по изменению акустического импульса в результате его прохождения или отражения от обследуемой структуры выявляют особенности строения ее скрытых, глубинных слоев.

С докладом выступает К.В. Грешневиков, аспирант кафедры радиофизики СПбГПУ

Одним из применений такой системы является создание специального зондирующего комплекса для неразрушающего контроля качества постройки и мониторинга состояния обсадных колонн (труб) нефте- и газодобывающих скважин подводного бурения. В связи с большими экологическими и финансовыми рисками, связанными с возможными неудачами при постройке и эксплуатации таких скважин (достаточно вспомнить недавнюю аварию в Мексиканском заливе), ведущие российские и зарубежные компании, имеющие отношение к добыче энергоресурсов, такие как FMC Technologies, StatoilHydro, Schlumberger и др., очень заинтересованы в подобной разработке.

Акустические колебания в протяженной цилиндрической структуре при любом сосредоточенном возбуждении являются сложным волновым процессом, часть энергии которого остается в сечении возбуждения или вблизи него, а часть безвозвратно уходит в виде волн, распространяющихся вдоль оси системы. Последний вид колебаний является вредным, поскольку, во-первых, он может содержать лишь малую долю информации о структуре, а во-вторых, эти волны покидают зону обследования, которая на практике неизбежно локализована в пределах относительно небольшого удаления от места возбуждения.

Количество концентрических труб, из которых состоит скважина, достигает пяти, но подавляющая часть «убегающих» волн, по-видимому, приходится на внутреннюю трубу,

так как именно в ней создается акустический удар. Первая труба является в некотором смысле фильтром, определяющим спектр частот колебаний, проходящих в более глубокие слои исследуемой структуры. Поэтому крайне важно исследовать структуру распространяющихся в ней колебаний и волн.

К.В. Грешневиков в своей работе получил строгое аналитическое решение задачи о распространении акустических волн в тонкостенной трубе, которая моделирует первую трубу скважины. При этом оказалось, что существует некоторая полоса частот, в которой волна вдоль оси трубы распространяться не может (см. рисунок) – в этой полосе фазовая скорость такой волны оказывается мнимой.

Диапазон $f_1 - f_2$ соответствует колебаниям, не распространяющимся вдоль оси системы, и является таким образом некой «запрещенной полосой» (отмечена штриховкой на рисунке). Этот эффект был рассмотрен докладчиком в соавторстве с Г.П. Жабко в работе [3], тогда как до нее в литературе не было найдено его описания. Исследуя трубу на частотах «запрещенной полосы», можно рассчитывать, что значительная доля энергии возбуждаемых в трубе колебаний идет на сбор полезной информации о структуре и остается локализованной в окрестности сечения возбуждения.

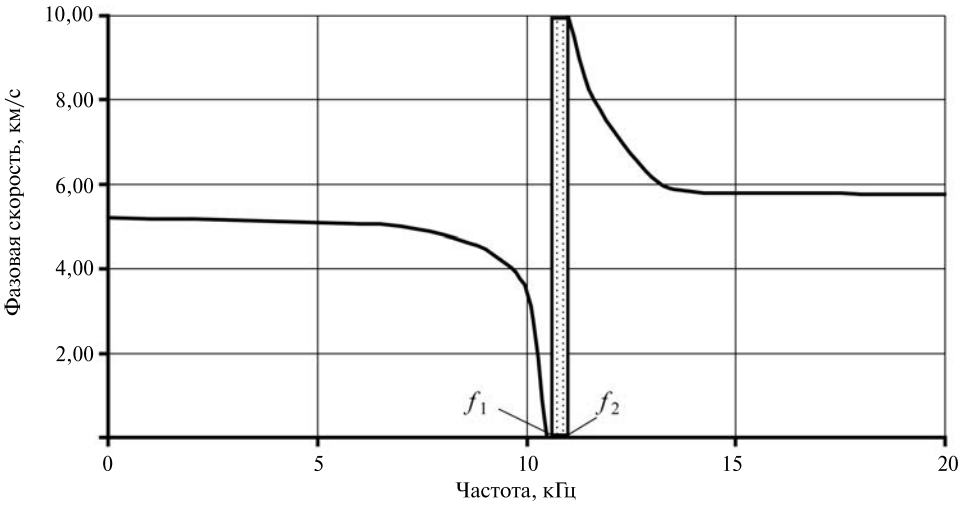
В работе Ю.В. Векшина и К.Г. Виноградова предложен метод контроля качества радиоастрономической аппаратуры и, в частности, радиометров. Радиоастрономический приемник (радиометр) предназначен для приема, измерения и регистрации радиоизлучения космических источников. В большинстве случаев радиоастрономические сигналы представляют собой случайные процессы (являются шумовыми сигналами), при этом уровень принимаемого сигнала значительно ниже уровня собственных шумов измерительной системы (антенна плюс радиометр). Поэтому для решения задачи приема малого сигнала при большом уровне шумов с получением максимально возможного отношения сигнал/шум на выходе радиоастрономический приемник должен обладать высокой чувствительностью и высокой стабильностью.

Исследование стабильности каскадов радиоастрономического приемника – важная задача. Одним из методов измерения стабильности является расчет так называемой дисперсии Аллана $D_A(\tau)$ [4]. Это дисперсия первых разностей, усредненных на временном интервале τ, значений сигнала y:

$$D_A(\tau) = 1/2\langle (y_{k+1}(\tau) - y_k(\tau))^2 \rangle$$

(здесь угловыми скобками показано статистическое усреднение).

Поведение $D_A(\tau)$ зависит от спектральной плотности мощности (СПМ) шума. В радиоастрономических приемниках проявляются шумы с различной СПМ, которую можно рассматривать как сумму слагаемых вида $C_\alpha f^{-\alpha}$



Зависимость фазовой скорости продольной акустической волны от частоты для трубы (радиус 0,08 м) из углеродистой стали

(f – частота). В частности, при $\alpha = 0$ имеем белый шум (СПМ есть константа от f), а при $\alpha = 1$ – фликкер-шум. Для шума с СПМ вида $1/f^{\alpha}$ дисперсия Аллана $D_A(\tau)$ пропорциональна $\tau^{(\alpha-1)}$. При совокупном аддитивном действии шумов с различной СПМ на зависимости $D_A(\tau)$ существует минимум, дающий оптимальную величину интервала усреднения $\tau_{опт}$ отсчетов y. На интервале $\tau_{опт}$ система проявляет себя как стабильная, и усреднение отсчетов y приводит к снижению дисперсии шума и увеличению точности определения измеряемой величины.

Для исследования экспериментальных данных авторами были разработаны методики расчета дисперсии Аллана и оценки спектральной плотности мощности. В своей работе Ю.В. Векшин и К.Г. Виноградов приводят результаты исследования отдельных узлов радиоастрономического приемника, предназначенного для измерения излучения воды и водяного пара в атмосфере Земли [5].

Анализ с применением дисперсии Аллана позволяет определить оптимальное время накопления выходного сигнала радиометра, при котором достигается минимальный уровень шумов (и, соответственно, значение наилучшей чувствительности), а также интервал времени стабильности характеристик радиометра. Исследование стабильности отдельных каскадов радиометра позволяет выявить основные источники флуктуаций, характер нестабильности и определить пути улучшения характеристик радиометра.

В работе В.В. Воробьева решена задача об излучении заряда, движущегося через объемную периодическую структуру из бесконечно длинных тонких параллельных проводов (проволочный метаматериал) перпендикулярно проводам. Автором получено аналитическое решение задачи в предположении, что данный метаматериал может характеризоваться тензором диэлектрической проницаемости ε_{ik}. Это справедливо только для тех частот, для которых длина электромагнитной волны много больше расстояния между проводами. Благодаря использованию полученного решения для одной заряженной частицы в качестве функции Грина, автору удалось решить весьма важную задачу об излучении пучка заряженных частиц, движущихся в рассматриваемом метаматериале.

Жюри высоко оценило описанные выше работы, признав их лучшими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. XV Всероссийская научная конференция студентов-радиофизиков [Текст]: Тез. докл. 6 – 7 декабря 2011 года. – СПб.: Изд-во «Соло», 2011. – 159 с.

2. XIV Всероссийская научная конференция студентов-радиофизиков [Текст]: Тез. докл. 7 – 8 декабря 2010 года. – СПб.: Изд-во «Соло», 2010. – 121 с.

3. **Грешневиков, К.В.** Исследование акустических волн в протяженной осесимметричной цилиндрической структуре [Текст] / К.В. Грешневиков, Г.П. Жабко // Сб. «Научные исследования и инновационная деятельность». – СПб.: СПбГПУ, 2011. – С. 118–125.

4. **Векшин, Ю.В.** Исследование стабильности измерительных устройств с применением дисперсии Алана [Текст] / Ю.В. Векшин, К.Г. Виноградов, С.И. Иванов, А.П. Лавров// XXXIX Неделя науки СПбГПУ. Матер. Междунар. науч.-практ. конф. Ч. IX. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – С. 5 – 6.

5. **Быков, В.Ю.** Аппаратура системы измерения электрических характеристик тропосферы [Текст] / В.Ю. Быков, Г.Н. Ильин, М.Н. Кайдановский // Тр. Ин-та прикладной астрономии РАН. –2010. – Вып. 21. – С. 255–267.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КОНТАКТНЫЕ ДАННЫЕ

АНДРЕЕВА Наталья Владимировна – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-73-33
nvandr@gmail.com

АРХИПОВ Александр Викторович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-61-27
arkhipov@rphf.spbstu.ru

БАРАНОВ Алексей Анатольевич – *студент радиофизического факультета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-63-14
vladimir_semenov@mail.ru

БОЖОКИН Сергей Валентинович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 290-00-98
bsvjob@mail.ru

ВАСИЛЬЕВА Мария Александровна – *старший научный сотрудник, заместитель заведующего кафедрой физики полупроводников и наноэлектроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-71
vilyin@rphf.spbstu.ru

ВЕКО Ольга Владимировна – *студентка физико-математического факультета Мозырского государственного педагогического университета им. И.П. Шамякина, Белоруссия.*
247760, Белоруссия, Гомельская обл., г. Мозырь, Студенческая ул., 28
(029) 967-92-34
vekoolga@mail.ru

ГАВРИКОВА Татьяна Андреевна – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики полупроводников и наноэлектроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-71
zykov@rphf.spbstu.ru

ГАРБАРУК Андрей Викторович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры гидроаэродинамики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 329-47-92
agarbaruk@mail.ru

ГОНЧАРОВА Полина Сергеевна – *аспирантка кафедры физики Дальневосточного государственного университета путей сообщения.*
680056, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47
(4212) 407-614
p_lopatina@mail.ru

ГОРЯЙНОВ Георгий Иванович – *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ОАО «Технологии полимерных материалов».*
198035, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7
(812) 334-38-53
ggcomposit@mail.ru

ГРИЦКЕВИЧ Михаил Сергеевич *аспирант кафедры гидроаэродинамики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 294-84-89
gritskevich@ymail.com

ДВОРЕЦКАЯ Наталья Владиславовна — *ведущий инженер кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-61-27
nat@rphf.spbstu.ru

ДОНСКОЙ Виктор Ильич — *кандидат технических наук, доцент кафедры общей физики Иркутского государственного университета.*
664003, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1
(3952) 52-12-61
sibmica@yandex.ru

ДОРИГО Даниель (DORIGO Daniel) — *аспирант кафедры измерительных систем и сенсорной техники Мюнхенского технического университета, Германия.*
80333 Deutschand, München, Theresienstr. 90, Nordgelände, Rueckgeb. N5.
d.dorigo@tum.de

ЕЛАГИН Владимир Вениаминович — *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-95-16
vladimir.elagin@mail.ru

ЕРМАК Сергей Викторович — *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 535-10-09
vladimir_semenov@mail.ru

ЕРШОВ Николай Николаевич — *кандидат физико-математических наук, ведущий специалист закрытого акционерного общества «Научные приборы».*
190103, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
(812) 251-60-00
ershov@sinstr.ru

ЖУКОВ Алексей Евгеньевич — *доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор кафедры физики и технологии наноструктур Санкт-Петербургского государственного политехнического университета и кафедры оптоэлектроники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета, ведущий научный сотрудник лаборатории физики полупроводниковых гетероструктур Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН, проректор по высшему образованию — директор Центра высшего образования, заведующий лабораторией нанофотоники Санкт-Петербургского академического университета — Научно-образовательного центра РАН.*
194021, г. Санкт-Петербург, ул. Хлопина, 8/3
(812) 448-85-94
zhukov@beam.ioffe.ru

ЗЕЛИКМАН Марк Аронович — *доктор физико-математических наук, профессор кафедры экспериментальной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-77-90
marzelik@mail.ru

ЗУБОВ Всеволод Иванович — *аспирант кафедры теории управления Санкт-Петербургского государственного университета.*
199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
(812) 274-80-11
ddemidova@mail.ru

ЗУБОВ Сергей Владимирович — *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления Санкт-Петербургского государственного университета.*
199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
(812) 274-80-11
ddemidova@mail.ru

ИЛЬИН Владимир Иванович — *доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики полупроводников и наноэлектроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-71
vilyin@rphf.spbstu.ru

КАПРАЛОВА Виктория Маратовна — *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной физики и оптики твердого тела Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-76-21
kapralova2006@yandex.ru

КАРНАКОВ Владимир Агафангелович – *кандидат физико-математическмх наук, доцент кафедры теоретической физики Иркутского государственного университета.*
664003, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1
(3952) 52-12-61
vak@admin.isu.ru

КЕРН Штефан (KERN Stefan) – *профессор Технологического института г. Карлсруэ, Германия.*
76344 Eggenstein-Leopoldshafen, IHM, Karlsruhe Institute of Technology, Hermann-von-Helmholtz-Platz 1, Germany
+49/721/608-24163
stefan.kern@kit.edu

КИСЕЛЬ Василий Васильевич – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и теоретической физики Белорусского государственного педагогического университета им. М. Танка, Белоруссия.*
220050, Белоруссия, г. Минск, Советская ул.,18
(017) 260-42-91
e.ovsiyuk@mail.ru

КОРЕНЕВ Владимир Владимирович – *аспирант кафедры физики и технологии наноструктур, младший научный сотрудник лаборатории нанофотоники Санкт-Петербургского академического университета – Научно-образовательного центра РАН.*
194021, г. Санкт-Петербург, ул. Хлопина, 8/3
(812) 448-85-94
korenev@spbau.ru

КОТОВ Олег Иванович – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиофизики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-78
kotov@rphf.spbstu.ru

КРАСНОВ Дмитрий Александрович – *аспирант кафедры общей физики Иркутского государственного университета.*
664003, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1
(3952) 52-12-61
dkrasnov88@mail.ru

КРЕЛЬ Святослав Игоревич – *аспирант кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-61-27
8svyatoslav8@mail.ru

КРИШТОП Виктор Владимирович – *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики Дальневосточного государственного университета путей сообщения.*
680056, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47
(4212) 407-614
krishtop@festu.khv.ru

КРЯЧКО Александр Федотович – *доктор технических наук, профессор кафедры радиоэлектронных средств защиты информации Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 294-08-60
alex_k34.ru@mail.ru

ЛИОКУМОВИЧ Леонид Борисович – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиофизики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-78
leonid@spbstu.ru

ЛУКША Олег Игоревич – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-61-27
louksha@rphf.spbstu.ru

ЛЫКОВ Сергей Николаевич – *кандидат физико-математических наук, профессор кафедры физики полупроводников и наноэлектроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-71
spectrumist@yandex.ru

МАКСИМОВ Михаил Викторович – *доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории физики полупроводниковых гетероструктур Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН, ведущий научный сотрудник лаборатории нанофотоники Санкт-Петербургского академического университета – Научно-образовательного центра РАН.*
194021, г. Санкт-Петербург, ул. Хлопина, 8/3
(812) 297-31-82
maximov @beam.ioffe.ru

МАРЦЕНЮК Михаил Андреевич – *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерных систем и телекоммуникаций Пермского государственного национального исследовательского университета.*
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
(342) 236-17-93
mrcn@psu.ru

МИРОНОВ Владимир Олегович – *аспирант кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-75-16
vladimir.mironov@ymail.com

ОВСИЮК Елена Михайловна – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики и методики преподавания физики Мозырского государственного педагогического университета им. И.П. Шамякина, Белоруссия.*
247760, Белоруссия, Гомельская обл., г. Мозырь, Студенческая ул., 28
(029) 534-50-90
e.ovsiyuk@mail.ru

ОМЕЛЬЧЕНКО Александр Владимирович – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, заместитель директора Центра высшего образования по учебной работе, заведующий кафедрой математических и информационных технологий Санкт-Петербургского академического университета – Научно-образовательного центра РАН.*
194021, г. Санкт-Петербург, ул. Хлопина, 8/3
(812) 448-85-94
avo-travel@yandex.ru

ПАВЛОВ Федор Федорович – *ассистент кафедры экспериментальной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-75-74
pavlovfedor@mail.ru

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович – *доктор технических наук, профессор кафедры гидравлики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 297-84-15
fonpetrich@mail.ru

ПИКУЛЬ Ольга Юрьевна – *кандидат физико-математических наук, докторант кафедры физики Дальневосточного государственного университета путей сообщения.*
680021 г. Хабаровск, ул. Серышева, 47
(4212) 407-614
pikoul2008@gmail.com

ПЛЯСЦОВ Семен Алексеевич – *аспирант кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-73-33
s.plyastsov@gmail.com

ПОЦЕЛУЕВ Кирилл Андреевич – *аспирант кафедры экспериментальной физики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-77-90
poc-kira@mail.ru

РЕДЬКОВ Виктор Михайлович – *кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории теоретической физики Института физики им. Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Белоруссия.*
220072, г. Минск, пр. Независимости, 68
(029) 250-84-03
v.redkov@dragon.bas-net.by

РОМАНОВА Валентина Ивановна – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры антенн и эксплуатации радиоэлектронной аппаратуры Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.*
197000, г. Санкт-Петербург, Большая Морская ул., 67
(812) 494-70-21
romanova@mail.ru

САВЕЛЬЕВ Артем Владимирович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры твердотельной электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета и кафедры физики конденсированного состояния Санкт-Петербургского академического университета – Научно-образовательного центра нанотехнологий РАН; старший научный сотрудник лаборатории нанофотоники этого университета.*
194021, г. Санкт-Петербург, ул. Хлопина, 8/3
(812) 448-85-94
artem.savelyev@gmail.com

САРАКУЗ Олег Николаевич – *кандидат химических наук, старший научный сотрудник ОАО «Технологии полимерных материалов».*
198035, г. Санкт-Петербург, Двинская ул., 5/7
(812) 555-38-59
ggcomposit@mail.ru

СЕМЕНОВ Владимир Васильевич – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры квантовой электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-63-14
vladimir_semenov@mail.ru

СЕРОВ Дмитрий Вадимович – *старший преподаватель кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 297-84-15
dimusum@yandex.ru

СЛУЦКЕР Александр Ильич – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной физики и оптики твердого тела Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812)552-76-21
kapralova2006@yandex.ru

СМОЛИН Роман Владимирович – *аспирант кафедры квантовой электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-63-14
yarosvet@bk.ru

СОМИНСКИЙ Геннадий Гиршевич – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-61-27
sominski@rphf.spbstu.ru

СОЧАВА Александр Андреевич – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехнческая ул., 29
(812) 552-80-90
sochava@radio.rphf.spbstu.ru

СТРЕКОПЫТОВ Иван Сергеевич – *аспирант кафедры теории управления Санкт-Петербургского государственного университета.*
199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
(812) 274-80-11
ddemidova@mail.ru

СТРЕКОПЫТОВА Мария Владимировна – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления Санкт-Петербургского государственного университета.*
199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
(812) 274-80-11
ddemidova@mail.ru

СЮЙ Александр Вячеславович – *кандидат физико-математических наук, профессор кафедры физики Дальневосточного государственного университета путей сообщения.*
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47
(4212) 407-614
fizika@festu.khv.ru

ТОЛСТОВ Евгений Викторович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики Дальневосточного государственного университета путей сообщения.*
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47
(4212) 407-614
fizika@festu.khv.ru

ТРОШЕВ Антон Алексеевич – *аспирант кафедры общей физики Иркутского государственного университета.*
664003, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1
(3952) 52-12-61
antonanton@mail.ru

УШАКОВ Николай Александрович – *аспирант кафедры радиофизики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-78
nushakoff@gmail.com

ФЕДОРОВА Лариса Александровна – *кандидат технических наук, доцент кафедры антенн и эксплуатации радиоэлектронной аппаратуры Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.*
197000, г. Санкт-Петербург, Большая Морская ул., 67
(812) 494-70-21
Lara.940@mail.ru

ФИЛИМОНОВ Алексей Владимирович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-73-33
filimonov@rphf.spbstu.ru

ФОТИАДИ Александр Эпаминондович – *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-95-16
fotiadi@rphf.spbstu.ru

ФУФАЧЕВ Михаил Андреевич – *аспирант кафедры компьютерных систем и телекоммуникаций Пермского государственного национального исследовательского университета.*
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
(342) 236-17-93
iwantgroup@mail.ru

ЧЕРЕПАНОВ Андрей Сергеевич – *доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой радиофизики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*
195291, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
(812) 552-96-78
ascher@radio.rphf.spbstu.ru

ЧИЖОВА Екатерина Викторовна – *аспирантка Института аналитического приборостроения Российской академии наук, инженер закрытого акционерного общества «Научные приборы».*
190103, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
(812) 251-60-00
chizhova@sinstr.ru

ШАЦКАЯ Людмила Александровна – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики и физики нефтегазового производства Самарского государственного технического университета.*
443100, г. Самара, Молодогвардейская ул., 244
(846) 242-45-44
ludmilad@rambler.ru

ШАЦКИЙ Александр Владимирович – *кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры общей физики и физики нефтегазового производства Самарского государственного технического университета.*
443100, г. Самара, Молодогвардейская ул., 244
(846) 242-45-44
iskandar2003@mail.ru

ШУРЫГИНА Наталья Александровна – *старший преподаватель кафедры общей физики Иркутского государственного университета.*
664003, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1
(3952) 52-12-61
shurygina_n@mail.ru

ЩЕРБАЧЕНКО Лия Авенировна – *доктор технических наук, профессор кафедры общей физики Иркутского государственного университета.*
664003, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1
(3952) 52-12-61
irk.sherbachenko@mail.ru

АННОТАЦИИ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Андреева Н.В., Плясцов С.А., Филимонов А.В. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ПЬЕЗООТКЛИКА КЕРАМИКИ ТИТАНАТА СТРОНЦИЯ МЕТОДАМИ СИЛОВОЙ МИКРОСКОПИИ ПЬЕЗООТКЛИКА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ.

Проведено экспериментальное исследование динамики сегнетоэластических свойств керамики титаната стронция при низких температурах по методике силовой микроскопии пьезоотклика. Показано наличие особенностей поверхностного пьезоотклика при температурах сегнетоэластического фазового перехода $T = 105$ K и «состояния Мюллера».

КЕРАМИКА. ТИТАНАТ СТРОНЦИЯ. СЕГНЕТОЭЛАСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА. МЕТОДИКА СИЛОВОЙ МИКРОСКОПИИ ПЬЕЗООТКЛИКА.

Архипов А.В., Дворецкая Н.В., Керн Ш., Лукша О.И., Соминский Г.Г. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА ЭЛЕКТРОНОВ, БОМБАРДИРУЮЩИХ ТВЕРДОТЕЛЬНУЮ МИШЕНЬ.

Представлены результаты численного тестирования методики восстановления энергетического спектра электронного потока по результатам измерений спектров тормозного рентгеновского излучения с коллектора. Показано, что при выполнении ряда условий восстановление электронных распределений может быть проведено даже без априорной экспериментальной информации о виде спектров, генерируемых моноэнергетическими потоками электронов в изучаемом приборе – на основании универсальной формулы Крамерса.

ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ. РЕНТГЕНОВСКАЯ СПЕКТРОМЕТРИЯ. ТОРМОЗНОЕ РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ.

Архипов А.В., Крель С.И. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ОБЛЕГЧЕННОЙ ПОЛЕВОЙ ЭМИССИИ ЭЛЕКТРОНОВ ИЗ НАНОМАТЕРИАЛОВ.

Представлена упрощенная численная модель процессов, сопровождающих полевую автоэлектронную эмиссию из наноструктурированных материалов. Результаты проведенного моделирования статического режима эмиссии показали, что многие экспериментально наблюдаемые особенности эмиссионных характеристик углеродных пленок могут быть объяснены в предположении о доминировании непрямого механизма переноса электронов в вакуум через промежуточные состояния, локализованные вблизи поверхности.

АВТОЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ. ПОЛЕВАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ. ДВУХСТУПЕНЧАТАЯ МОДЕЛЬ. НАНОУГЛЕРОД. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.

Баранов А.А., Ермак С.В., Семенов В.В. ПОДАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИОННОГО СВЕТОВОГО СДВИГА ЧАСТОТЫ РАДИООПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В ЩЕЛОЧНЫХ АТОМАХ В УСЛОВИЯХ ЛАЗЕРНОЙ НАКАЧКИ.

Аналитически рассмотрены световой и ориентационный сдвиги частоты радиооптического СВЧ резонанса в различных щелочных атомах с учетом тензорной компоненты. Показано, что использование модуляционной методики в условиях лазерной накачки D_1- и D_2-линиями головного дублета позволяет не только подавить световой сдвиг, но и дает возможность значительно уменьшить ориентационные погрешности парощелочных квантовых дискриминаторов при изменении их положения относительно направления внешнего магнитного поля.

СВЕТОВОЙ СДВИГ. ОРИЕНТАЦИОННЫЙ СДВИГ. ЛАЗЕРНАЯ НАКАЧКА. СТАНДАРТ ЧАСТОТЫ.

Баранов А.А., Ермак С.В., Смолин Р.В., Семенов В.В. СВЕТОВЫЕ СДВИГИ ЧАСТОТЫ РАДИООПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В ПАРАХ РУБИДИЯ ПРИ СЕЛЕКТИВНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ НАКАЧКЕ.

Рассмотрен альтернативный традиционной схеме вариант селективной оптической накачки паров рубидия, где в качестве рабочего вещества используются пары рубидия-85, а в ячейке-фильтре помещен изотоп рубидий-87. При этом проводится сопоставление расчетных данных светового сдвига частоты для вариантов оптической накачки ламповым и лазерным источниками.

СВЕТОВОЙ СДВИГ. ДВОЙНОЙ РАДИООПТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС. СТАНДАРТ ЧАСТОТЫ. СЕЛЕКТИВНАЯ ОПТИЧЕСКАЯ НАКАЧКА.

Божокин С.В., Лыков С.Н. НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.

Найдено аналитическое выражение непрерывного вейвлет-преобразования для простейшего нестационарного сигнала, который представляет собой произведение огибающей гауссовой формы на осциллирующую функцию. Сложный нестационарный сигнал представляется в виде суперпозиции простейших нестационарных сигналов. В качестве материнского используется вейвлет Морле. Приведена формула для восстановления сигнала по известному значению непрерывного вейвлет-преобразования, а также получены выражения для локальной плотности спектра энергии сигнала и спектральных интегралов.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ СИГНАЛ. НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ. МАТЕРИНСКИЙ ВЕЙВЛЕТ МОРЛЕ.

Васильева М.А., Гаврикова Т.А., Ильин В.И. XIII ВСЕРОССИЙСКАЯ МОЛОДЕЖНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ФИЗИКЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВ И НАНОСТРУКТУР, ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ОПТО- И НАНОЭЛЕКТРОНИКЕ.

В статье подведены итоги XIII Всероссийской молодежной конференции по физике полупроводников и наноструктур, полупроводниковой опто- и наноэлектронике, которая прошла в Санкт-Петербурге с 21 по 25 ноября 2011 года. Названы доклады студентов и аспирантов, отмеченных дипломами конференции.

МОЛОДЕЖНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ. ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ. НАНОСТРУКТУРЫ. ОПТОЭЛЕКТРОНИКА. СТУДЕНТ. АСПИРАНТ.

Гончарова П.С., Криштоп В.В., Сюй А.В., Толстов Е.В., Пикуль О.Ю. ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКИМ СВЕТОМ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ АНИЗОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛОВ.

Приведены спектральные характеристики излучения, проходящего через оптическую систему, состоящую из двух анизотропных кристаллов и трех поляризаторов. Показано, что излучение в такой системе промодулировано по спектру (имеет чередующиеся по длине волны максимумы и минимумы). За счет изменения положения максимумов и минимумов в одном из кристаллов можно добиться эффективной модуляции интенсивности излучения на выходе из такой оптической системы. Электрооптический модулятор с использованием в качестве источника излучения светодиода со спектральной шириной более десяти нанометров имеет коэффициент модуляции более 80 %.

МОДУЛЯЦИЯ. ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ. НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. АНИЗОТРОПНЫЙ КРИСТАЛЛ. СПЕКТРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА.

Грицкевич М.С., Гарбарук А.В. ВСТРОЕННЫЙ МЕТОД КРУПНЫХ ВИХРЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБЪЕМНОГО ИСТОЧНИКА ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ.

Предложен простой и эффективный метод расчета турбулентных течений в рамках встроенного метода крупных вихрей (Embedded Large Eddy Simulation, или ELES)-подхода. Метод реализован в коде общего назначения FLUENT и, как показали результаты его тестирования, обеспечивает высокую точность расчета как присоединенных, так и отрывных течений.

ELES-ПОДХОД. ГИБРИДНЫЕ RANS/LES-ПОДХОДЫ. ОБЪЕМНЫЙ ИСТОЧНИК ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ. ОТРЫВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ.

Елагин В.В., Фотиади А.Э. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ПРИЗЕМНОГО УЛЬТРАФИОЛЕТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПО ДАННЫМ GOME.

Предлагается метод коррекции функции поглощения озоном потока солнечной энергии на земную поверхность в ультрафиолетовом диапазоне спектра, а также метод учета облачности в модели Берда, используемой для реконструкции биологически активной ультрафиолетовой радиации у поверхности Земли по данным GOME.

УЛЬТРАФИОЛЕТОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. АТМОСФЕРНЫЙ ОЗОН. ПОГЛОЩЕНИЕ. ЛАДЕНБУРГ.

Зеликман М.А., Поцелуев К.А. ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРНОГО ФАКТОРА НА КОНФИГУРАЦИЮ ЛИНЕЙНЫХ ВИХРЕЙ В ТРЕХМЕРНОЙ УПОРЯДОЧЕННОЙ ДЖОЗЕФСОНОВСКОЙ СРЕДЕ.

Получены системы разностных уравнений, описывающие две возможные токовые конфигурации линейного вихря в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде, основанные на условиях квантования флюксоида в ячейках. Теоретическое исследование проводилось в предположении, что магнитное поле в ячейке неоднородно.

Предложен метод точного решения системы в случае обеих конфигураций линейного вихря при любых значениях параметров. Рассчитаны токовые конфигурации линейного вихря, а также значения полных энергий обеих конфигураций.

ГРАНУЛИРОВАННЫЕ СВЕРХПРОВОДНИКИ. ТРЕХМЕРНАЯ УПОРЯДОЧЕННАЯ ДЖОЗЕФСОНОВСКАЯ СРЕДА. ЛИНЕЙНЫЕ ВИХРИ. УСЛОВИЯ КВАНТОВАНИЯ ФЛЮКСОИДА.

Зубов В.И., Зубов С.В., Стрекопытова М.В., Стрекопытов И.С. ЗАДАЧА О ПОСТРОЕНИИ УПРАВЛЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

Статья посвящена изучению управляемой механической голономной системы, описываемой системой уравнений Лагранжа 1-го рода. Приведены теоремы о построении управлений этой системы таким образом, чтобы система имела асимптотически устойчивое интегральное многообразие.

УПРАВЛЕНИЕ. УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА. ИНТЕГРАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ.

Кисель В.В., Овсиюк Е.М., Веко О.В., Редьков В.М. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ВЕКТОРНОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ.

Квантовомеханическое волновое уравнение для частицы со спином 1 исследуется во внешнем магнитном поле в пространстве постоянной положительной кривизны S_3. Выполнена процедура разделения переменных t, r, φ, z; уравнения по переменной r решаются в гипергеометрических функциях. Исследование зависимости волновой функции от переменной z доведено до системы трех связанных между собой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для трех функций; получить в явном виде точные решения этих уравнений не удается.

СФЕРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО РИМАНА. УРАВНЕНИЕ ДАФФИНА – КЕММЕРА. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ. ПРАВИЛО КВАНТОВАНИЯ.

Коренев В.В., Савельев А.В., Жуков А.Е., Омельченко А.В., Максимов М.В. МОДЕЛЬ ОДНОВРЕМЕННОЙ ГЕНЕРАЦИИ ЧЕРЕЗ ОСНОВНОЕ И ВОЗБУЖДЕННОЕ СОСТОЯНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЛАЗЕРАХ НА КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ.

Теоретически исследован режим одновременной генерации через основной и возбужденный оптические переходы в лазерах на основе самоорганизующихся квантовых точек InAs/InGaAs. Показано, что различие в темпах захвата электронов и дырок приводит к уменьшению мощности, излучаемой на основном переходе при увеличении тока накачки, вплоть до ее полного гашения. Учет указанного обстоятельства позволяет количественно описать экспериментальную ватт-амперную характеристику и ее спектральные составляющие.

ДВУХУРОВНЕВАЯ ГЕНЕРАЦИЯ. ЛАЗЕРЫ НА КТ. ТЕМП ЗАХВАТА. МЕЖУРОВНЕВАЯ РЕЛАКСАЦИЯ. ГАШЕНИЕ ГЕНЕРАЦИИ ЧЕРЕЗ ОСНОВНЫЕ ПЕРЕХОДЫ. ВАТТ-АМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ.

Крячко А.Ф., Романова В.И., Федорова Л.А. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛАЗМЕННОГО ВОЛНОВОДА.

Рассмотрена аналитическая модель процессов, сопровождающих рассеяние электромагнитных волн на неоднородности полубесконечного плазменного волновода. Электромагнитное поле, распространяющееся вдоль плазменного волновода, приведено к системе парных интегральных уравнений, которая преобразована в граничную задачу для функций, аналитических в плоскости комплексного переменного. Результаты проведенного моделирования показали возможность учета вклада различных типов волн в результирующее рассеянное поле. Вычислены дисперсионные характеристики для разных типов волн. Получены выражения, позволяющие оценить поле излучения в дальней зоне на основе метода стационарной фазы.

ПЛАЗМЕННЫЙ ВОЛНОВОД. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ. МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.

Марценюк М.А., Фуфачев М.А. ФОРМИРОВАНИЕ СРЕДЫ С ИСКУССТВЕННОЙ ОПТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТЬЮ.

Для формирования локального кирального окружения точки гиротропной среды предлагается использовать метод орбит заданной группы симметрии. Для расчета тензора гирации применяется метод дискретной дипольной аппроксимации (ДДА). Показана связь тензора гирации с тензором перекрестной диполь-тороидной поляризуемости, рассмотрены примеры зависимости угла вращения плоскости поляризации (вычисляемого прямо из тензора гирации) от параметров структуры локального окружения.

ИСКУССТВЕННЫЕ ГИРОТРОПНЫЕ СРЕДЫ. КИРАЛЬНОСТЬ СРЕДЫ. ТЕНЗОР ГИРАЦИИ. АКСИАЛЬНЫЙ ТОРОИДНЫЙ МОМЕНТ. ДИСКРЕТНАЯ ДИПОЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ. РАСЧЕТ УГЛА ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ.

Миронов В.О. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ФОТОННЫХ ПУЧКОВ В ДИСТАНЦИОННОЙ ЛУЧЕВОЙ ТЕРАПИИ ПО ДАННЫМ ИОНИЗАЦИОННЫХ МАТРИЦ.

В статье рассмотрена сравнительная оценка погрешности профильных зависимостей для фотонных пучков с энергией 6 МэВ по данным измерений при помощи ионизационных матриц и водного фантома с ионизационными камерами. Проведен анализ областей применимости матрицы для контроля качества фотонных пучков мегаэлектронвольтного диапазона энергий для клинических условий. Даны практические рекомендации по проведению процедур оптимизации дозиметрических экспериментальных данных при анализе терапевтических полей облучения.

КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА. ЛУЧЕВАЯ ТЕРАПИЯ. ДОЗИМЕТРИЯ. ИОНИЗАЦИОННЫЕ МАТРИЦЫ. ПРОФИЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ. ФОТОНЫ. АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ.

Овсиюк Е.М., Веко О.В., Кисель В.В., Редьков В.М. НОВЫЕ ЗАДАЧИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И УРАВНЕНИЕ ГОЙНА.

Система уравнений для электромагнитного поля в пространстве Лобачевского преобразована в уравнение, совпадающее по форме с одномерным уравнением Шредингера с эффективным потенциалом; на его основе проведен анализ зеркально отражающих свойств среды, моделируемой геометрией Лобачевского. Задача для частицы со спином 1 в кулоновском поле сведена к уравнению Гойна и определенному классу функций Гойна.

НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. УРАВНЕНИЕ ГОЙНА.

Павлов Ф.Ф. РАСЧЕТ СПИН-ЗАВИСИМОЙ СТРУКТУРНОЙ ФУНКЦИИ ДЕЙТРОНА В ПЕРЕМЕННЫХ СВЕТОВОГО КОНУСА.

Рассматривается релятивистский дейтрон как система двух сильно взаимодействующих нуклонов (двухнуклонное приближение) в формализме светового конуса. Показана процедура последовательного вычисления релятивистских ядерных поправок к средней спиральности протона в дейтроне и спин-зависимой структурной функции дейтрона $g_1^D(x,Q^2)$.

ДЕЙТРОН. СПИРАЛЬНОСТЬ. НУКЛОН. ПРОТОН. СПИН. СВЕТОВОЙ КОНУС. СПИН-ЗАВИСИМАЯ СТРУКТУРНАЯ ФУНКЦИЯ. БОННСКАЯ ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ.

Петриченко М.Р., Серов Д.В. ТИПИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КРОККО.

Доказано, что монотонные решения предельной задачи для уравнения Крокко равносильны задаче Коши с параметром Δ, управляющим переносом на левой границе промежутка интегрирования.

ОБЫКНОВЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ. ДИФФЕОМОРФИЗМ.

Саракуз О.Н., Горяйнов Г.И., Капралова В.М., Слуцкер А.И. НОВЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННО СШИТЫЕ СЕГМЕНТИРОВАННЫЕ ПОЛИЭФИРУРЕТАНСИЛОКСАНОВЫЕ ЭЛАСТОМЕРЫ ДЛЯ МЕДИЦИНСКИХ ИМПЛАНТАТОВ.

Синтезированы новые пространственно сшитые сегментированные полиэфируретансилоксановые эластомеры для изготовления имплантатов с повышенными прочностью и долговечностью. Варьирование молекулярной массы и соотношения сегментов, а также вида отвердителя позволяет регулировать густоту пространственной сетки в эластомерах.

ЭЛАСТОМЕРЫ. ИМПЛАНТАТЫ. ПОЛИЭФИРУРЕТАНСИЛОКСАНЫ.

Ушаков Н.А., Дориго Д., Котов О.И., Лиокумович Л.Б. МЕТОДИКА ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СПЕКТРОВ КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ СОСТОЯНИЯ УГЛЕВОДОРОДНЫХ СМАЗОК НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ ИХ ВЯЗКОСТИ.

В статье рассмотрена возможность применения методов рамановской спектроскопии и современных способов обработки сигналов для оценки качества углеводородных смазочных материалов. Использовались методы анализа главных компонент (PCA) и вейвлет-фильтрации сложных сигналов. На основе обработки экспериментальных спектральных данных продемонстрирована возможность оценки вязкости смазочных масел.

РАМАНОВСКАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ. МЕТОД ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ. ОПТИЧЕСКИЙ СПЕКТР. ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ. ВЯЗКОСТЬ МАСЛА.

Черепанов А.С. ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ДИПОЛЕМ.

В работе решена задача о возбуждении поверхностных волн элементарным диполем, расположенным на слое металлизированного диэлектрика. Показано, что диполь наиболее эффективно излучает в направлении вдоль своей оси. Если электрическая толщина пластины велика, то диполь большую часть мощности излучает именно в виде поверхностных волн.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА. ИЗЛУЧЕНИЕ. ПОВЕРХНОСТНАЯ ВОЛНА. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ДИПОЛЬ. МЕТАЛЛИЗИРОВАННЫЙ ДИЭЛЕКТРИК.

Черепанов А.С., Сочава А.А. НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ СТУДЕНТОВ-РАДИОФИЗИКОВ РОССИИ.

Представлена информация о XV Всероссийской научной конференции студентов-радиофизиков, которая прошла 6 – 7 декабря 2011 года в Петродворце в учебном комплексе Санкт-Петербургского государственного университета. Перечислены доклады студентов и аспирантов, награжденных дипломами и премиями. Кратко описано содержание трех докладов.

РАДИОФИЗИКА. КОНФЕРЕНЦИЯ. СТУДЕНТ. АСПИРАНТ. АКУСТИЧЕСКАЯ ВОЛНА. РАДИОМЕТР. ПРОВОЛОЧНЫЙ МЕТАМАТЕРИАЛ.

Чижова Е.В. РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИИ РЕНТГЕНООПТИЧЕСКОЙ СХЕМЫ РЕНТГЕНОФЛУОРЕСЦЕНТНОГО МИКРОАНАЛИЗАТОРА.

Работа посвящена оптимизации геометрии рентгенооптической схемы рентгенофлуоресцентного микроанализатора на основе моделирования его работы методом Монте-Карло. Кратко описан алгоритм моделирования, на основе расчета метрологических параметров микроанализа показана эффективность оптимизации.

РЕНТГЕНОФЛУОРЕСЦЕНТНЫЙ МИКРОАНАЛИЗ. ГЕОМЕТРИЯ СХЕМЫ. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО.

Чижова Е.В., Ершов Н.Н. РАСЧЕТ СИСТЕМЫ ФОКУСИРОВКИ ПЕРВИЧНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В РЕНТГЕНОФЛУОРЕСЦЕНТНОМ МИКРОАНАЛИЗАТОРЕ.

Работа посвящена оптимизации системы формирования потока первичного рентгеновского излучения в рентгенофлуоресцентном микроанализаторе. Приведены результаты теоретических расчетов, позволивших смоделировать работу системы рентгеновская трубка – поликапиллярная рентгеновская линза и определить оптимальные параметры ее сопряжения.

ПОЛИКАПИЛЛЯРНАЯ РЕНТГЕНОВСКАЯ ЛИНЗА. РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ФОРМИРОВАНИЕ МИКРОЗОНДА.

Шацкий А.В., Шацкая Л.А. ДИФРАКЦИОННОЕ ЗАТУХАНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ЛУЧА, СОЗДАВАЕМОГО ТОРЦОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА.

Проведен расчет дифракционного затухания ультразвукового луча в системе «поршневой излучатель – цилиндрический волновод – исследуемая среда». Показано, что наличие пространственной дисперсии в акустическом волноводе приводит к значительным осцилляциям дифракционного затухания, в отличие от поля поршневого излучателя, а также к возникновению областей с отрицательным значением дифракционного затухания.

УЛЬТРАЗВУК. ВОЗБУЖДЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН. ДИФРАКЦИОННОЕ ЗАТУХАНИЕ ВОЛН. УЛЬТРАЗВУКОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ.

Шурыгина Н.А., Щербаченко Л.А., Донской В.И., Карнаков В.А., Трошев А.А., Краснов Д.А. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ НА МЕЖФАЗНЫХ ГРАНИЦАХ В ГЕТЕРОГЕННЫХ ПОЛИМИНЕРАЛЬНЫХ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМАХ.

Рассмотрены проблемы явлений, происходящих в электрически активных неоднородных дисперсных системах. На границах раздела жидкой и твердой фаз обнаружено наличие электрических сил, приводящих к возникновению градиентов потенциала собственного внутреннего электрического поля, способного обеспечить циркуляцию токов в таких системах. Экспериментально зарегистрировано влияние двойного электрического слоя, характерного для таких систем, на процесс структурообразования. Установлен механизм протекания электрических процессов на межфазных границах двух разнородных полярных диэлектриков.

ПОРТЛАНДЦЕМЕНТ. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ. ДВОЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ СЛОЙ. ЭЛЕКТРЕТ. КЛАСТЕРНАЯ СТРУКТУРА. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. СТРУКТУРООБРАЗОВАНИЕ.

ABSTRACTS

KEY WORDS

Andreeva N.V., Plyastsov S.A., Filimonov A.V. LOW-TEMPERATURE SURFACE PIEZOELECTRICITY IN STRONTIUM TITANATE CERAMICS VIA PIEZORESPONSE FORCE MICROSCOPY.

$SrTiO_3$ ceramics has been investigated by piezoresponse force microscopy at low temperatures. Interesting behavior of ferroelectric properties was observed at temperature of antiferrodistortive phase transition and in the range of temperatures where Muller phase exists.

CERAMICS. STRONTIUM TITANATE. FERROELECTRIC PROPERTIES. PIEZORESPONSE FORCE MICROSCOPY.

Arkhipov A.V., Dvoretskaya N.V., Kern St., Louksha O.I., Sominski G.G. RECONSTRUCTION OF ENERGY SPECTRA OF ELECTRONS BOMBARDING A SOLID TARGET.

A diagnostical method for reconstruction of electron energy distributions on the basis of bremsstrahlung X-ray spectra from electron beam device collector were tested in simulations and experiments. Applicability of the universal Kramers'es law for reconstruction of electron energy distributions has been numerically estimated for different data acquisition layout conditions.

ELECTRON BEAM DIAGNOSTICS. ELECTRON ENERGY DISTRIBUTION. X-RAY SPECTROMETRY. BRAKE RADIATION.

Arkhipov A.V., Krel S.I. A SIMPLE MODEL OF FACILITATED FIELD-INDUCED ELECTRON EMISSION FROM NANOMATERIALS.

A simple numerical model is proposed to describe the complex of phenomena associated with field-induced electron emission from nanostructured materials. The performed simulations demonstrated that many of the features of experimentally observed emission behavior of nanocarbonic films may be explained in the assumption of indirect (two-stage) mechanism of electron transfer to vacuum via intermediary states located by the emitter surface.

AUTOELECTRONIC EMISSION. FIELD-INDUCED ELECTRONIC EMISSION. TWO-STAGE MODEL. NANOCARBON. NUMERAL SIMULATION.

Baranov A.A., Ermak S.V., Semenov V.V. ORIENTATION LIGHT SHIFT SUPPRESSION IN ALKALI ATOMS MICROWAVE STANDARDS WITH LASER PUMPING.

This work presents analytical studies of the orientation and light frequency shifts in microwave standards with regard to tensor component. It was shown that modulation technique application not only allows eliminating light shift but also provides significant reduction of the frequency errors introduced by external magnetic field orientation fluctuations while pumping alkali atoms with either D_1 or D_2 line.

LIGHT SHIFT. ORIENTATION SHIFT. LASER PUMPING. MICROWAVE STANDARD.

Baranov A.A., Ermak S.V., Smolin R.V., Semenov V.V. RADIO-OPTICAL RESONANCE FREQUENCY LIGHT SHIFT IN SELECTIVE OPTICAL PUMPED RUBIDIUM VAPOR.

Theoretical research results of alternative selective optical pumped absorption cell with Rb^{85} and filter cell containing atoms of Rb^{87} are presented. And the calculated light frequency shifts for lamp- and laser-pumping are compared.

LIGHT SHIFT. RADIO-OPTICAL RESONANCE. FREQUENCY STANDARD. SELECTIVE OPTICAL PUMPING.

Bozhokin S.V., Lykov S.N. CONTINUOUS WAVELET TRANSFORMATION.

An annalytical expression of continuous wavelet-transformation for the elementary nonstationary signal which represents work bending around Gauss forms on sine wave function is found. The complex nonstationary signal is represented in the form of superposition of the elementary nonstationary signals. The formula for restoration of a signal on known value of continuous wavelet transformation is resulted, as well as expressions for local density of a spectrum of energy of a signal and spectral integrals are obtained.

NONSTATIONARY SIGNALS. CONTINUOUS WAVELET TRANSFORMATION. PARENT MORLET WAVELET.

Cherepanov A.S. THE EXCITATION OF SURFACE WAVES BY AN ELEMENTARY DIPOLE.

The problem of excitation of surface waves by elementary dipole disposed on metallized dielectric slab has been solved. It was shown that dipole radiates surface waves most effectively in the direction along the dipole axis. If electric thickness of dielectric slab is large then the major portion of power is radiated in the form of surface wave.

ELECTRODYNAMICS. RADIATION. SURFACE WAVE. ELEMENTARY DIPOLE. METALLIZED DIELECTRIC.

Cherepanov A.S., Sochava A.A. THE SCIENTIFIC CONFERENCE OF RUSSIAN UNDERGRADUATES SPECIALIZING IN RADIOPHYSICS.

The information on 'The XVth All-Russian Conference of Undergraduates Specializing in Radiophysics' held in Petrodvoretz, on December 6 – 7, 2011, at educational center of Saint-Petersburg State University has been represented. The students' and post-graduate students' reports diplomaed and awarded by prizes at the conference were outlined. The contents of three reports were briefly described.

RADIOPHYSICS. CONFERENCE. STUDENT. POST-GRADUATE STUDENT. ACOUSTIC WAVE. RADIOMETER. WIRED METAMATERIAL.

Chizhova E.V. CALCULATION OF THE MICRO-XRF SPECTROMETER SCHEME GEOMETRY.

This paper is devoted to optimization of the micro-XRF geometry scheme using a Monte-Carlo simulation. A brief description of the simulation algorithm is given, calculation of the metrological parameters of the microanalysis shows the optimization efficiency.

MICRO-XRF ANALYSIS. SCHEME GEOMETRY. MONTE-CARLO SIMULATION.

Chizhova E.V., Ershov N.N. CALCULATION OF A PRIMARY X-RAY RADIATION FOCUSING SYSTEM IN THE MICRO-XRF SPECTROMETER.

This work is devoted to optimization of a primary X-ray radiation formation system in the micro-XRF spectrometer. Some theoretical results are given. Calculations made it possible to simulate work of the X-ray tube – polycapillary X-ray lens system and to define parameters of the combination.

POLYCAPILLARY X-RAY LENS. X-RAY RADIATION. MICROPROBE FORMATION.

Elagin V.V., Fotiadi A.E. THE DETERMINATION OF GROUND ULTRAVIOLET RADIATION INTENSITY FROM GOME DATA.

The authors propose a method for correction of the function of absorption of the solar energy stream (the ultraviolet) by ozone on the terrestrial surface and a method for the cloud cover account in the Bird's model used for reconstruction of biologically active ultraviolet radiation in the vicinity of the Earth surface from GOME data.

ULTRAVIOLET. ATMOSPHERIC OZONE. ABSORPTION. GOME. LADENBURG.

Goncharova P.S., Krishtop V.V., Sui A.V., Tolstov E.V., Pikul O.Yu. THE ELECTRO-OPTICAL CONTROL OF NONMONOCHROMATIC LIGHT IN A SYSTEM OF TWO ANISOTROPIC CRYSTALS.

The spectral characteristics of emission transmitted through a system of two anisotropic crystals and three polarizers are given. The emission in the system has been demonstrated to be modulated spectrally (it passed through maxima and minima alternating over a wavelength). Resiting maxima and minima in one crystal somebody can get the effective emission intensity modulation at the output of such an optical system. The electro-optical modulator using a light diode of more than ten nanometers spectral wide as a radiation source had a modulation index beyond 80 percent.

MODULATION. ELECTRO-OPTICAL EFFECT. NONMONOCHROMATIC EMISSION. ANISOTROPIC CRYSTAL. SPECTRAL CHARACTERISTIC.

Gritskevich M.S., Garbaruk A.V. EMBEDDED LARGE EDDY SIMULATION WITH THE USE OF A VOLUME SOURCE OF TURBULENT FLUCTUATIONS.

A simple and effective method for computation of turbulent flows within the Embedded LES framework is proposed. The method is implemented in general purpose FLUENT code and its tests show that both attached and separated flows are predicted by the proposed method with a high accuracy.

ELES. HYBRID RANS/LES APPROACHES. VOLUME SOURCE OF TURBULENT FLUCTUATIONS. FLOWS SEPARATED.

Kisel V.V., Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Red'kov V.M. QUANTUM MECHANICS FOR A VECTOR PARTICLE IN THE MAGNETIC FIELD ON FOUR-DIMENSIONAL SPHERE.

Quantum-mechanical wave equation for a particle with spin 1 is investigated in presence of external magnetic field in spaces with non-Euclidean geometry with constant positive curvature. The separation of the t, r, φ, z variables is performed;

differential equations in the r variable are solved in hypergeometric functions. The study of z-dependence of the wave function has been reduced to a system of three linked ordinary differential 2-nd order equations; till now the system is not solved.

SPHERICAL RIEMANN SPACE. DUFFIN – KEMMER EQUATION. MAGNETIC FIELD. HYPERGEOMETRIC FUNCTION. QUANTIZATION RULE.

Korenev V.V., Savelyev A.V., Zhukov A.E., Omelchenko A.V., Maximov M.V. THE MODEL OF SIMULTANEOUS DOUBLE-STATE LASING IN SEMICONDUCTOR QD LASERS.

We have provided theoretical investigation of the double-state lasing phenomena in InAs/InGaAs self-assembled quantum dot lasers. It is shown that the difference between electron and hole capture rates leads to decrease of output lasing power via QD ground states with increasing current. Taking into account this effect makes it possible to describe observed watt-ampere characteristic and its spectral components both qualitatively and quantitatively.

DOUBLE-STATE LASING. QD LASERS. CAPTURE RATE RATIO. INTER-LEVEL RELAXATION. GROUND-STATE LASING QUENCHING. WATT-AMPERE CHARACTERISTIC.

Kryachko A.F., Romanova V.I., Fedorova L.A. DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY HETEROGENEITY OF THE PLASMA WAVEGUIDE.

The analytical model of the processes accompanying dispersion of electromagnetic waves by heterogeneity of a semi-infinite plasma waveguide has been considered. The electromagnetic field extending along a plasma waveguide was led to a system of the pair equations integrated which was transformed to a boundary problem for functions, analytical in planes of the complex variable. Results of the simulation performed have shown a possibility of the account of the contribution of various types of waves in a resultant absent-minded field. Dispersive characteristics for different types of waves were calculated. The expressions were obtained, allowing to estimate a radiation field in a distant zone on the basis of a stationary phase method.

PLASMA WAVEGUIDE. BOUNDARY PROBLEM. DISPERSIVE EQUATION. STATIONARY PHASE METHOD. SIMULATION.

Martsenyuk M.A., Fufachev M.A. THE FORMATION OF MEDIUM WITH ARTIFICAL OPTICAL ACTIVITY.

For the purpose of the formation of local chiral surrounding of a given medium point the orbit method of symmetry group is proposed. Gyration tensor is calculated by Discrete Dipole Approximation (DDA) method. The dependence of gyration tensor on cross dipole-toroidal polarizability tensor is established. Examples of computation of the rotation polarization angle which is considered as a function of local environment structure parameters are given.

ARTIFICAL GYROTROPIC MEDIA. CHIRALITY OF MEDIUM. GYRATION TENSOR. AXIAL TOROIDAL MOMENT. DISCRETE DIPOLE APPROXIMATION. ROTATION OF POLARIZATION PLANE. COMPUTATION OF ROTATION POLARIZATION ANGLE.

Mironov V.O. AN ESTIMATION OF PHOTON BEAMS PARAMETERS IN THE REMOTE RADIATION TREATMENT FROM IONIZATION MATRICES.

A comparative estimation for inaccuracy in profile dependency of photon beams with the energy of 6 MeV has been considered using experimental data from ionization matrices and water phantom with ionization chambers. The regions of practicality for a matrix to test the photon 6 MeV beams quality under the clinical conditions were analyzed. The practical recommendations are given how to carry out the optimizing procedure of dosimetric experimental data during the analysis of therapeutic beam fields.

QUALITY CONTROL. RADIATION THERAPY. DOSIMETRY. IONIZATION MATRICES. PROFILE INACCURACY. PHOTON OPTIMIZATION ALGORITHMS.

Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Kisel V.V., Red'kov V.M. NEW PROBLEMS IN QUANTUM MECHANICS AND THE HEUN EQUATION.

The system of equations for electromagnetic field in the Lobachevsky space is transformed into a single equation which formally coincides with an 1-dimensional Schrodinger equation with an effective potential; on this base, analysis of ideal mirror properties of the medium sumulated by the Lobachevsky geometry is performed. The problem of a spin 1 particle in the Coulomb field is reduced to the Heun equation and to a special class of the Heun functions.

NON-EUCLIDEAN GEOMETRY. QUANTUM MECHANICS. FIELD THEORY. HEUN EQUATION.

Pavlov F.F. THE CALCULATION OF SPIN-DEPENDENT STRUCTURE FUNCTION OF A DEUTERON IN A FORMAL DESCRIPTION OF THE LIGHT CONE.

The paper views a relativistic deuteron as a system of two intensively interacting nucleons (a dinucleon approach) in a formal description of the light cone. A procedure for consistent calculation of relativistic nuclear corrections to the mean helicity of the proton in the deuteron and the spin-dependent structure $g_1^D\left(x, Q^2\right)$ function of the deuteron is shown.

DEUTERON. HELICITY. NUCLEON. PROTON. SPIN. LIGHT CONE. SPIN-DEPENDENT STRUCTURE FUNCTIONS. BONN WAVE FUNCTION.

Petrichenko M.R., Serov D.V. TYPICAL LIMITING PROBLEMS FOR THE CROCCO EQUATION.

It is proved that monotone solutions of the limiting problem for the Crocco equation are tantamount to the Cauchy problem with delta-parameter that controls the transport on the left border of an interval of integration.

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION. LIMITING PROBLEM. ASYMPTOTIC DECOMPOSITION. DIFFEOMORPHISM.

Sarakuz O.N., Goryainov G.I., Kapralova V.M., Slutsker A.I. NEW SEGMENTED CROSS-LINKED POLY(ESTERURETHANSILOXANE) ELASTOMERS FOR MEDICAL IMPLANTS.

New cross-linked segmented poly(esterurethansiloxane) elastomers have been synthesized for implants of increased strength and durability. It is possible to change the cross-linking density in elastomers by varying of chain segments molecular mass and ratio and chemical structure of a hardening agent.

ELASTOMERS. IMPLANTS. POLY(ESTERURETHANESILOXANE).

Shatsky A.V., Shatskaya L.A. DIFFRACTION ATTENUATION OF THE ULTRASONIC RAY OF THE CYLINDRICAL WAVEGUIDE CREATED BY THE END FACE.

The calculation of diffraction attenuation of an ultrasonic ray in "a piston radiator – a cylindrical waveguide – the investigated environment" system is carried out. It is shown that spatial dispersion presence in an acoustic waveguide leads to the considerable oscillations of diffraction attenuation unlike a field of a piston radiator and also to origin of areas with the negative value of diffraction attenuation.

ULTRASOUND. EXCITATION OF ULTRASONIC WAVES. DIFFRACTION ATTENUATION OF WAVES. ULTRASONIC MEASUREMENTS.

Shourygina N.A., Sherbachenko L.A., Donskoy V.I., Karnakov V.A., Troshev A.A., Krasnov D.A. ELECTRICAL PHENOMENA AT INTERFACES IN HETEROGENEOUS POLYMINERAL SYSTEMS DISPERSED.

The problems of phenomena taking place in electrically active heterogenious systems dispersed have been considered. The presence of electric forces which cause the self-potential gradients of the internal electric field was revealed at the interface of liquid and solid phases. That field is able to maintain the circulation of currents in such systems. The influence of the double electric layer typical for such systems on forming structure was registered experimentally. The mechanism for electric processing at interfaces of two different polar dielectrics was established.

PORTLANDCEMENT. DIELECTRIC POLARIZATION. DOUBLE ELECTRIC LAYER. ELECTRET. CLUSTER STRUCTURE. ELECTRIC POTENTIAL. STRUCTURE FORMATION.

Ushakov N.A., Dorigo D., Kotov O.I., Liokumovich L.B. TECHNIQUE OF DIGITAL SIGNAL PROCESSING OF RAMAN SPECTRA FOR HYDROCARBON LUBRICANTS CONDITION DIAGNOSTICS BASED ON VISCOSITY ESTIMATION.

In the presented paper an ability of application of Raman spectroscopy and modern signal processing methods for hydrocarbon lubricants quality estimation has been considered. Principal component analysis and wavelet filtering methods were used for complex signal processing. On the basis of experimental spectra an ability of lubrication oils viscosity estimation was demonstrated.

RAMAN SPECTROSCOPY. PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS. OPTICAL SPECTRUM. WAVELET FILTERING. CLASSIFICATION. LUBRICANT VISCOSITY.

Vasil'eva M.A., Gavricova T.A., Ilyin V.I. THE XIIIth ALL-RUSSIAN YOUNG-PEOPLE CONFERENCE ON SEMICONDUCTOR PHYSICS AND NANOSTRUCTURES, SEMICONDUCTOR OPTO- AND NANOELECTRONICS.

The article reviews the work of 'The XIIIth All-Russian Young-People Conference on Semiconductor Physics and Nanostructures, Semiconductor Opto- and Nanoelectronics' held in Saint-Petersburg, on November 21 – 25, 2011. The titles of students' and post-graduate students' reports diplomaed at the conference are presented.

YOUNG-PEOPLE CONFERENCE. SEMICONDUCTOR PHYSICS. NANOSTRUCTURES. OPTOELECTRONICS. STUDENT. POST-GRADUATE STUDENT.

Zelikman M.A., Potseluev K.A. THE INFLUENCE OF STRUCTURAL FACTOR ON THE CONFIGURATION OF LINEAR VORTEX IN THE 3D-ORDERED JOSEPHSON MEDIUM.

The systems of difference equations describing two possible current configurations of linear vortex in the 3D ordered Josephson medium based on the conditions of fluxoid quantization in the cells are obtained. The theoretical investigation was realized on the assumption that magnetic field in a cell is not homogeneous.

A method of exact solutions of the systems in case of both configurations of linear vortex for all values of parameters is proposed. The current configurations for linear vortex as well as the values of full energies of both configurations are calculated.

GRANULATED SUPERCONDUCTORS. 3D-ORDERED JOSEPHSON MEDIUM. LINEAR VORTEX. CONDITIONS OF FLUXOID QUANTIZATION.

Zubov V.I., Zubov S.V., Strecopitova M.V., Strecopitov I.S. THE PROBLEM OF CONSTRUCTION OF CONTROLS OVER A MECHANICAL SYSTEM CONTROLLED.

The paper is devoted to investigation of a guided mechanical goulonom system described by a set of Lagrange's equations of the first kind. The theorems of construction of control over this system are given. They make it possible to construct controls in such a way that the system is asymptotically robust integral manifold.

CONTROL. SYSTEM CONTROLLED. LAGRANGE'S EQUATIONS. INTEGRAL MANIFOLD. ASYMPTOTICAL STABILITY.

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ СПбГПУ

№ 1 (141) 2012

Серия «Физико-математические науки»

Учредитель – Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Издание зарегистрировано в Госкомпечати РФ, свидетельство № 013165 от 23.12.94

Редакция

д-р физ.-мат. наук, профессор *В.К. Иванов* – председатель ред. коллегии
д-р физ.-мат. наук, профессор *А.Э. Фотиади* – зам. председателя ред. коллегии
канд. физ.-мат. наук, доцент *В.М. Капралова* – ответственный секретарь
канд. физ.-мат. наук *О.А. Ящуржинская* – научный редактор, корректор
А.С. Колгатина – технический секретарь

Телефон редакции 294-22-85

E-mail: physics@spbstu.ru

Компьютерная верстка *С.В. Горячевой*

Директор Издательства Политехнического университета *А.В. Иванов*

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Подписано в печать. 12.04.2012. Формат 60×84 1/8. Бум. тип. № 1.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,0. Уч.-изд. л. 26,0. Тираж 1000. Заказ 90

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.
Издательство Политехнического университета,
член Издательско-полиграфической ассоциации университетов России.
Адрес университета и издательства: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.